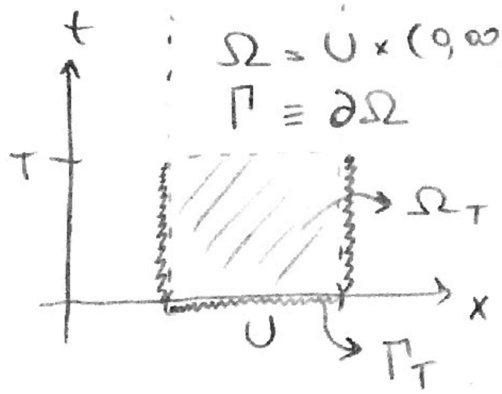
Principio del máximo para la ec. del calor

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y acotado, $T>0 \rightsquigarrow \boxed{\Omega_T = U \times (0,T)}$

Definición (Borde parabólico de Ω_T)



$\Gamma_T = \{(x,t) \in \overline{\Omega_T} \ / \ x \in \partial U$ ó $t=0\}$

$= (\partial U \times [0,T]) \cup (\overline{U} \times \{0\})$

Recordatorio: $C^{2,1}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \ / \ f(\cdot,t) \in C^2(U) \wedge f(x,\cdot) \in C^1(0,\infty)\}$

Teorema 1 (Ppio Máx/Mín): Si $u \in C^{2,1}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ y cumple $\Delta u \geq u_t$ (resp $\Delta u \leq u_t$) $\Rightarrow \boxed{\max_{\overline{\Omega_T}} u = \max_{\Gamma_T} u}$ (resp $\min_{\Omega_T} u = \min_{\Gamma_T} u$), $\forall T>0$.

D// Ver APÉNDICE.//

Interpretación física Si $u(x,t)$ es la temperatura en $(x,t) \in U \times (0,\infty)$ de un sólido U, y $u_t = \Delta u$ (no hay fuentes de calor) $\Rightarrow$ la máxima y mínima temperatura se alcanza en $t=0$ ó en ∂U para $t>0$.

Corolario 2 (Unicidad): Si $u, v \in C^{2,1}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ son soluciones de

$$(*) \begin{cases} u_t = \Delta u + f & \text{en } \Omega \\ u(x,0) = g(x) & \text{en } \overline{U} \times \{0\} \\ u(x,t) = h(x,t) & \text{en } \partial U \times [0,\infty) \end{cases} \Bigg] \ u|_\Gamma = G \qquad \Gamma = \partial\Omega \qquad \Rightarrow u = v$$

Corolario 3 (Continuidad): Si $u \in C^{2,1}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ es solución de $(*)$

$$\Rightarrow \max_{\overline{\Omega_T}} |u| \leq \sup_{\Gamma_T} |G| + \frac{R^2}{2n} \sup_{\overline{\Omega_T}} |f|, \text{ con } R \ / \ \Omega_T \subseteq B_R(0),$$

$\forall T>0$.

Más analogías LAPLACE/CALOR

- Soluc fundamental de $u_t = \Delta u$ en $\mathbb{R}^n$ $\equiv$ Función de Green de $\partial_t - \Delta$ en $\mathbb{R}^n$ ($\equiv$ HEAT KERNEL) (Lo veremos más adelante)
- Propiedad del valor medio. (EVANS, 45-59)
- Si u cumple la ec del calor en $\Omega \Rightarrow u \in C^\infty(\Omega)$.

Existencia para ⊛

Teorema 4: Consideremos el problema ⊛. Si los datos $F: \Omega \to \mathbb{R}$ ∧ $G: \partial\Omega \to \mathbb{R}$ son dados por funciones $\tilde{F}, \tilde{G}: \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ / $\tilde{F} \in C^{1,1}(\overline{\Omega})$, $\tilde{G} \in C^{3,2}(\overline{\Omega})$, y si U cumple la cond de la esfera exterior y ∂U s C^∞ (o si al menos $\exists\, U_k$ / $\overline{U_k} \subseteq U_{k+1}$ ∧ $U_k \rightrightarrows U$, con U_k C^∞, $\forall k$) $\Rightarrow$ ⊛ tiene único solución $u \in C^{3,2}(\overline{\Omega})$. ($\subseteq C^{2,1}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$).

(Ver ELLIPTIC AND PARABOLIC EQS., WU, YIN, WANG, 250)

Volvamos al problema

$$\odot \begin{cases} u_t = \Delta u & \text{en } \Omega \\ u(x,0) = g(x) & , x \in \overline{U} \\ u(x,t) = 0 & , x \in \partial U, t \geq 0 \end{cases} \qquad (u \in C^{2,1}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}))$$

Tenemos a $u(x,t) = \lim_{N \to \infty} \underbrace{\sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\lambda_n t} \phi_n(x)}_{u_N(x,t)}$ como candidato a solución, con $a_n = \langle \phi_n, g \rangle$. (Estamos suponiendo que $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e b.o.n de $G(\overline{U})$ y que $\Delta \phi_n = -\frac{1}{\lambda_n}\phi_n$ ∧ $\phi_n|_{\partial U} = 0$). Es claro que cada u_N cumple: $(u_N)_t = \Delta u_N$ en Ω, $u_N(x,0) = g_N(x)$, $x \in \overline{U}$, $u_N(x,t) = 0$ en $\partial U \times [0,\infty)$, con $g_N = \sum_{n=1}^{N} a_n \phi_n$.

Si asumimos que g y U están en las condic. del Teo anterior

$\Rightarrow \exists!$ soluc. v del problema $\odot$. Por dichas condiciones $g \in C^2(\bar{U}) \wedge g|_{\partial U} = 0 \Rightarrow g_N \rightrightarrows g$. Luego, por continuidad:

$$|v(x,t) - u_N(x,t)| \leq \sup_{\bar{U}} |g - g_N|, \ \forall (x,t) \in \bar{\Omega} \Rightarrow \boxed{u_N \rightrightarrows v}$$

$\therefore \quad u = \sum_{m\geq 1}^{\infty} \langle \phi_m, g \rangle e^{-\lambda_m t} \phi_m(x)$ es la soluc de $\odot$.

Cond. de $\exists$ alternativas

Consideremos el problema $\odot$. Sean (ϕ_m, λ_m) soluc. de $\begin{cases} \Delta u = -\lambda u \\ u|_{\partial U} = 0 \end{cases}$ / $\{\phi_m\}$ es b.o.n de $L^2(U)$, y $\lambda_m \xrightarrow[m \to \infty]{} +\infty$. $(u \in C^2(U) \cap C^0(\bar{U}))$

Teorema: Si se cumple que:

① $|\phi_m(x)| \leq M$, $\begin{pmatrix} \forall x \in \bar{U} \\ \forall m \in \mathbb{N} \end{pmatrix}$ con $M > 0$.

② $|D^\alpha \phi_m(x)| \leq M_\alpha |\lambda_m|^{k_\alpha}$, $\begin{pmatrix} \forall x \in U \\ \forall m \in \mathbb{N} \\ \forall\, 0 < |\alpha| \leq 2 \end{pmatrix}$ con $k_\alpha \in \mathbb{N}$, $M_\alpha > 0$.

③ $\lambda_m = P(m)$, con P polinomio. ④ $\exists \sum_{m\geq 1}^{\infty} |\langle \phi_m, g \rangle|$.

$\Rightarrow u(x,t) = \sum_{m\geq 1}^{\infty} \langle \phi_m, g \rangle e^{-\lambda_m t} \phi_m(x)$ es la soluc. de $\odot$.

D// Ejercicio// (Basta mostrar que $\sqrt[m]{|\lambda_m|^k e^{-\lambda_m t_0}} \xrightarrow[m \to \infty]{} l < 1$, $\forall k \in \mathbb{N}, \forall t_0 > 0$)

Ecuación de ondas ($U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto)

- $u_{tt}(x,t) - c^2 \Delta_x u(x,t) = f(x,t)$, $(x,t) \in U \times (0,\infty) \equiv \Omega$

($c \equiv 1$, de ahora en más)

- $\square \equiv \partial_t^2 - \Delta$ (D'Alembertiano) $\rightsquigarrow$ $\boxed{\square u = f}$

¿Condiciones de borde?

Caso $n=1$: "cuerda vibrante"

1. $\boxed{U = \mathbb{R}}$ cuerda infinita = sin extremos
(no forzada: $f \equiv 0$)

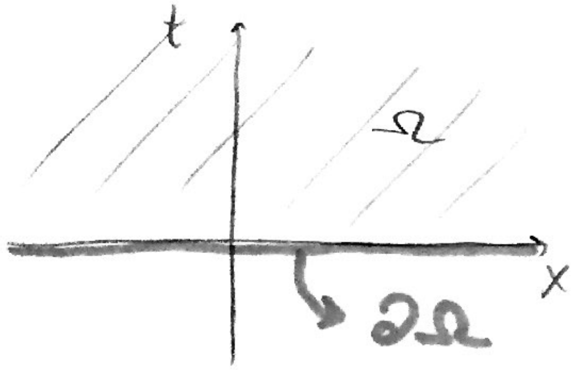
(*) $\begin{cases} \square u = 0 & \text{en } \mathbb{R} \times (0,\infty) = \Omega \\ u(x,0) = g(x) \\ \overset{*}{u}(x,0) = h(x) \end{cases}$ $\Big\}$ en $\mathbb{R} \times \{0\} = \partial\Omega$

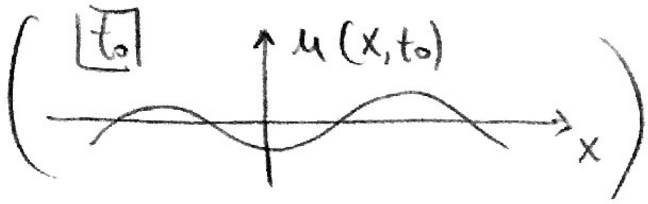
$g(x) \to$ (posición inicial)

$h(x) \to$ (velocidad inicial)

(condiciones iniciales)

(se pide $\lim_{t\to 0^+} u_t(x,t) = h(x)$, en realidad)





- Se busca $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$.

- Definamos $\begin{cases} \xi = x+t \\ \eta = x-t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\xi+\eta}{2} \\ t = \frac{\xi-\eta}{2} \end{cases}$. Tal cambio de variables

define $\tilde{u}(\xi,\eta) = u(\underbrace{\tfrac{\xi+\eta}{2}}_{x}, \underbrace{\tfrac{\xi-\eta}{2}}_{t})$. Es fácil ver que

$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial\xi\partial\eta}(\xi,\eta) = \frac{1}{2} \square u(x,t)$ $\therefore$ si hallamos $\tilde{u} \,/\, \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial\xi\partial\eta} = 0 \Rightarrow$

$u(x,t) = \tilde{u}(x+t, x-t)$ cumplirá $\square u = 0$.

- Como $\partial\tilde{u}/\partial\xi$ debe ser indep. de $\eta \Rightarrow \partial\tilde{u}/\partial\xi = f_1(\xi) \Rightarrow$

$\tilde{u} = \int f_1(\xi)\, d\xi + f_2(\eta) \Rightarrow \tilde{u}(\xi,\eta) = \alpha(\xi) + \beta(\eta) \Rightarrow$

$\Rightarrow u(x,t) = \alpha(x+t) + \beta(x-t)$. De las cond iniciales:

$$\underbrace{\alpha(x)+\beta(x)}_{u(x,0)} = g(x) \quad (1) \quad \wedge \quad \underbrace{\alpha'(x)-\beta'(x)}_{u_t(x,0)} = h(x) \Leftrightarrow \alpha(x)-\beta(x) = \int_0^x h(s)\,ds + C \quad (2)$$

$$\underset{(1,2)}{\Rightarrow} \quad \alpha(x) = \tfrac{1}{2}\left(g(x) + \int_0^x h(s)\,ds + C\right) \wedge \beta(x) = \tfrac{1}{2}\left(g(x) - \int_0^x h(s)\,ds - C\right)$$

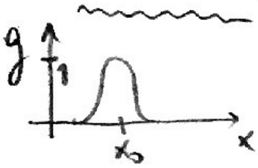
$$\therefore \odot \quad \boxed{u(x,t) = \tfrac{1}{2}\left(g(x+t) + g(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} h(s)\,ds\right)} \quad \left(\text{Fórmula de D'Alembert}\right)$$

(CLÁSICA)
<u>Teorema</u> ($\exists!$) 5: Si $g \in C^2(\mathbb{R})$ y $h \in C^1(\mathbb{R})$, el problema ⊛ tiene una única solución $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ y está dada por $\odot$.

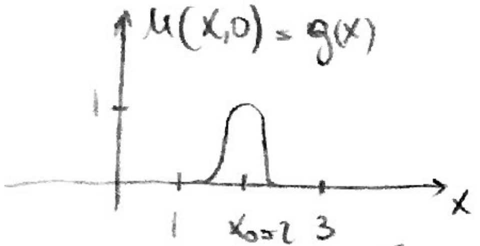
<u>OBS</u>: (1) La soluc. de ⊛ depende continua/ de los datos (g y h).

(2) Si $g \in C^2(\mathbb{R})$ y $h \in C^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \odot$ define un $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

<u>Evolución de u</u> (g = "pulso", $h = 0$)

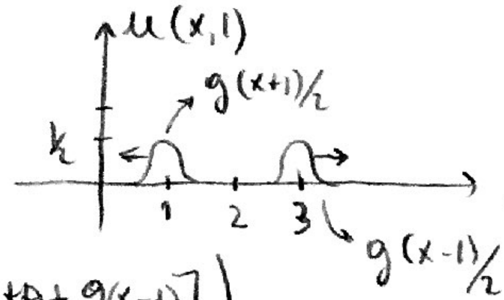


t=0



...

t=1

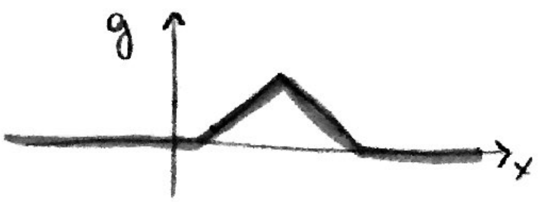


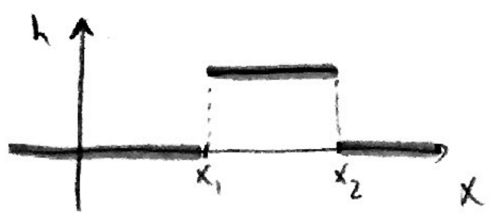
...

$$\left(u(x,t) = \tfrac{1}{2}[g(x+t) + g(x-t)]\right)$$

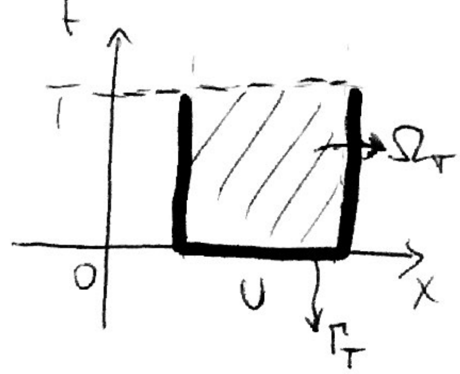
- ¿Qué pasa si $g \in C^0(\mathbb{R})$ y $h \in C^0(\mathbb{R})$? ⇝ <u>Solución DÉBIL</u>

(forma inicial) (velocidad inicial)





$\boxed{\text{APÉNDICE}}$



Demostración del ppio del máx. //

Procederemos en 2 pasos. Fijemos $T>0$.

① Supongamos que $\Delta u - u_t > 0$ en Ω_T. Si el máximo de u en $\overline{\Omega}_T$ es alcanzado en $(x_0,t)\in\Omega_T \Rightarrow \partial_t u(x_0,t_0) = \partial_{x_0} u(x_0,t_0) = 0$ $(\forall i)$

$\Rightarrow \partial^2_{x_i x_0} u(x_0,t_0) \le 0 \Rightarrow \underbrace{\Delta u}_{\le 0} - \underbrace{u_t}_{=0} \le 0$ ABS.

Si es alcanzado en $(x_0,T) \Rightarrow$ sigue siendo cierto que $\Delta u(x_0,T)\le 0$, pero ahora sólo podemos decir que $u_t(x_0,T)\ge 0$, pues

$$u_t(x_0,T) = \lim_{h\to 0^+} \frac{u(x_0,T)-u(x_0,T-h)}{h} \ge 0.$$

De todos modos, $\underbrace{\Delta u}_{\le 0} - \underbrace{u_t}_{\ge 0} \le 0$ ABS. O sea, el máx. de u en $\overline{\Omega}_T$ es alcanzado en Γ_T.

② Si $\Delta u - u_t \ge 0$ en Ω_T, definimos $v = u - \varepsilon t$, $\varepsilon>0$.

Es claro que $u \ge v$ en Ω_T (*). Además $\Delta v - v_t = \underbrace{\Delta u - u_t}_{\ge 0} + \varepsilon > 0$

$$\Rightarrow \max_{\overline{\Omega}_T} u = \max_{\overline{\Omega}_T} (v+\varepsilon t) \le \underbrace{\max_{\overline{\Omega}_T} v}_{\max_{\Gamma_T} v} + \varepsilon T \le \max_{\Gamma_T} u + \varepsilon T$$

$\max_{\Gamma_T} v$ (por ①) $\le \max_{\Gamma_T} u$ pues $v \le u$ (*)

Como tal desigualdad se debe cumplir $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow$

$\max_{\overline{\Omega}_T} u \le \max_{\Gamma_T} u$, de donde se desprende el resultado buscado. //