Autovalores y autovectores de Δ

$(u \not\equiv 0)$

Dados $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y acotado, se busca $u: \overline{U} \to \mathbb{R}$ ∧ $\lambda \in \mathbb{R}$ /

$$(*)\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{en } U \quad (u \in C^2(U) \cap C^0(\overline{U})) \\ u|_{\partial U} = 0 & (\text{ó } \partial u/\partial \hat{n} = 0 \text{ ó mixto ó } \dots) \end{cases}$$

↳ autofunción

autovalor

↳ (tipo Dirichlet) ↳ (tipo Neumann)

Lo veremos como un PROBLEMA AUXILIAR

Típicamente (s/ sea U - Ver EVANS 6.5.1.-)

① Las soluciones de (*) contienen un conjunto numerable $\{(\phi_n, \lambda_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\lambda_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$ ∧ $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es b.o. Ⓐ de $I(U)$ para el p.p.e $\langle f, g \rangle = \int_U \overline{f(x)}\, g(x)\, dV$.

OBS: ⓘ $\langle\,,\rangle$ no lleva peso. En cartesianas, y en $\mathbb{R}^3$, $dV = dx_1\, dx_2\, dx_3$. En cilíndricas, $dV = r\, dr\, d\theta\, dz$ (pero r no es un peso)

ⓘⓘ Puede haber degeneración: $\lambda_n = \lambda_m$ para algún par n, m.

② La degeneración puede ser a lo sumo finita. Ⓑ

③ De Ⓐ y Ⓑ se tiene que si (ϕ, λ) es solución de (*) $\Rightarrow \lambda = \lambda_k$ para algún k y ϕ es C.L. de los autovectores con autovalor λ_k (APÉNDICE).

④ Si $f \in C^2(\overline{U})$ ∧ $f|_{\partial U} = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{N} c_n \phi_n \rightrightarrows f$, con $c_n = \dfrac{\langle \phi_n, f \rangle}{\|\phi_n\|^2}$.

⑤ $U = (0,a) \times (0,b)$ ⇝ Proponemos $u(x,y) = X(x)\, Y(y)$ ⇝

$-\Delta u = \lambda u$ implica $-X'' Y - Y'' X = \lambda X Y \Rightarrow -X''/X - Y''/Y = \lambda$

$\Rightarrow \quad \dfrac{X''}{X} + \lambda = -\dfrac{Y''}{Y} = \beta$ (cte). Por otro lado, (2)

$u|_{\partial U} = 0$ implica $X(0) = X(a) = Y(0) = Y(b) = 0$. En resumen,

$$\text{(X)} \begin{cases} X'' + \overbrace{(\lambda - \beta)}^{\alpha} X = 0 \\ X(0) = X(a) = 0 \end{cases} \qquad \text{(Y)} \begin{cases} Y'' + \beta Y = 0 \\ Y(0) = Y(b) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_k(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \\ \alpha_k = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 \end{cases} (k \in \mathbb{N}) \qquad \begin{cases} Y_\ell(y) = \operatorname{sen}\left(\frac{\ell\pi x}{b}\right) \\ \beta_\ell = \left(\frac{\ell\pi}{b}\right)^2 \end{cases} (\ell \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \phi_{k\ell}(x,y) = \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{a}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\ell\pi y}{b}\right) \cdot \frac{2}{\sqrt{ab}} \\ \lambda_{k,\ell} = \pi^2\left((k/a)^2 + (\ell/b)^2\right) \end{cases} \rightsquigarrow \text{b.o.m. de } L^2(U)$$

(Por lo que sabemos s/ S. Fourier)

¿Son todas las soluciones de ⊛ para U? Como los $\phi_{k,\ell}$ son b.o.m y la degeneración de los $\lambda_{k,\ell}$ es finita, de (3) (Ver APÉNDICE) se sigue que los pares $\{(\phi_{k,\ell}, \lambda_{k,\ell})\}_{k,\ell \in \mathbb{N}}$ dan todas las soluciones.

<u>Aplicación</u>

$\boxed{\text{Dirichlet-Poisson}}$

$$\odot \begin{cases} \Delta u = -f & \text{en } U \\ u|_{\partial U} = 0 \end{cases}$$

- Supongamos que $\{(\phi_m, \lambda_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ da (todas las) soluc. para ⊛, siendo $\{\phi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ b.o.m de $L^2(U)$.

- Supongamos también que $f_N = \sum_{m=1}^{N} a_m \phi_m \to f$, para $a_m = \langle \phi_m, f \rangle$.

(1) Propongo $u = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \phi_m$ y aplico Δ t.a t. Esto da

$$\Delta u = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \underbrace{\Delta\phi_m}_{-\lambda_m \phi_m} = -\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m c_m \phi_m$$

(2) Resuelvo $\begin{cases} \Delta u = -f_N \\ u|_{\partial U} = 0 \end{cases}$ (p/c $N \in \mathbb{N}$)

Propongo $u_N = \sum_{m=1}^{N} c_m \phi_m$

De $\Delta u = -f$ se sigue que $-\sum_{n\geq 1}^{\infty} \lambda_n c_n \phi_n = -\sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n \phi_n \therefore$ $c_n = a_n/\lambda_n \therefore \boxed{u = \sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n/\lambda_n \, \phi_n}$

De $\Delta u_N = -f_N$ se sigue que $c_n = a_n/\lambda_n \therefore$ $\boxed{u_N = \sum_{n\geq 1}^{N} a_n/\lambda_n \, \phi_n}$ es soluc.

¿Es $u = \lim_{N\to\infty} u_N$ (si existe) solución de $\odot$?

- Pidamos que: (i) U cumple cond. de esf. ext., (ii) $f|_{\partial U} = 0$ (iii) $f \in C^2(\overline{U})$ $(\Rightarrow f \in C^1(U) \cap C^0(\overline{U}))$ $\Rightarrow (f_N \rightrightarrows f)$

lo cual asegura $\exists!$ para $\odot$.

- Sea v la única soluc. de $\odot$. Por continuidad, $|v(x) - u_N(x)| \leq$ $\leq M \sup_{\overline{U}} |f - f_N|$, $\forall x \in \overline{U}$. Como $f_N \rightrightarrows f \Rightarrow u_N \rightrightarrows v$. //

Los ϕ_n y la función de Green

$a_n = \int_U f(y)\phi_n(y)\, dV_y \Rightarrow u(x) = \sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n/\lambda_n \, \phi_n(x) =$ (si hay conv. unif. de)

$= \sum_{n\geq 1}^{\infty} 1/\lambda_n \left(\int_U f(y)\phi_n(y)\, dV_y\right)\phi_n(x) = \int_U \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x)\phi_n(y)}{\lambda_n}\right)}_{G(x,y)} f(y)\, dV_y$

OBS: $G(x,y) = G(y,x)$ (ver E6, P3)

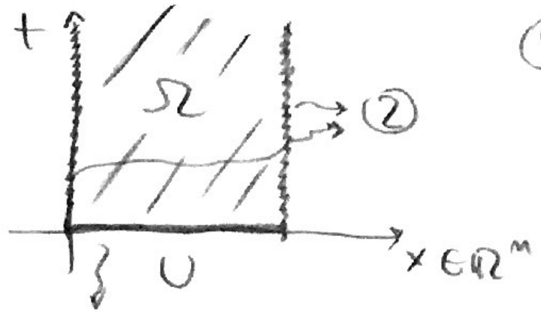
(Ej) $U = (0,a)\times(0,b) \Rightarrow G(x_1,x_2,y_1,y_2) = \sum_{k,l\geq 1}^{\infty} \frac{\text{sen}\left(\frac{k\pi x_1}{a}\right)\text{sen}\left(\frac{l\pi x_2}{b}\right)\text{sen}\left(\frac{k\pi y_1}{a}\right)\text{sen}\left(\frac{l\pi y_2}{b}\right)}{\pi^2\left((k/a)^2 + (l/b)^2\right)}$

Ecuación del calor ($U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y acotado)

$$\begin{cases} u_t(x,t) = k\Delta_x u(x,t) + f(x,t) & \text{en } \Omega = U\times(0,\infty) \\ u(x,0) = g(x), \quad x\in\overline{U} & (\text{ie } (x,t)\in \overline{U}\times\{0\}) \\ u(x,t) = h(x,t), \ \forall x\in\partial U, \forall t\in[0,\infty) & (\text{ie } (x,t)\in \partial U\times[0,\infty)) \end{cases} \quad \text{C.B.I.}$$

¿ $\partial u/\partial \hat{n}\,(x,t)$ ...

④



- $\partial\Omega = (\overline{U}\times\{0\}) \cup (\partial U \times [0,\infty))$

  ① ②

- Se le pide a u que vive en $C^{2,1}(\Omega)\cap C^{0}(\overline{\Omega})$ ①

Con $C^{2,1}(\Omega) = \{ f(x,t) \,/\, f(x,\cdot)\in C^1(0,\infty) \text{ y } f(\cdot,t)\in C^2(U) \}$

- Nos vamos a concentrar en:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{en } U\times(0,\infty) \\ u(x,0) = g(x), & x\in\overline{U} \\ u(x,t) = 0 & \text{en } \partial U\times[0,\infty) \end{cases} \qquad (\underline{\text{Compatibilidad}} \ \ g|_{\partial U} = 0)$$

¿Cómo lo resolvemos? Sean $(\lambda_n,\phi_n) \,/\, \Delta\phi_n = -\lambda_n\phi_n$, $\phi_n|_{\partial U} = 0$ (en U) y $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ b.o.n en $L^2(U)$.

Supongamos que $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x)$. Propongamos $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\phi_n(x)$ y procedamos "formalmente". La condición $u(x,0) = g(x)$ dice que $\underline{c_n(0) = a_n}$ Ⓐ. La ecuación $u_t - \Delta u = 0$ implica que $\sum_{n=1}^{\infty} c_n'(t)\phi_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\underbrace{\Delta\phi_n(x)}_{-\lambda_n\phi_n(x)} = 0 \therefore$

$\underline{c_n'(t) + \lambda_n c_n(t) = 0}$ Ⓑ. De Ⓐ y Ⓑ se sigue que $\boxed{c_n(t) = a_n e^{-\lambda_n t}}$

Tenemos como candidato a solución la serie $\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n t}\phi_n(x)}$

(Ej) $U = (0,a)\times(0,b) \Rightarrow u(x,y,t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm}\, e^{-[(n\pi/a)^2 + (m\pi/b)^2]t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$

con $a_{nm} = \frac{2}{\sqrt{ab}}\int_0^a\int_0^b g(x,y)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right)dx\,dy$

APÉNDICE ($U \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, acotado con ∂U C^1 a trozos)

Proposición: Supongamos que los pares (ϕ_m^i, λ_m) con $i=1,\dots,M_m$, $M_m \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{N}$, son soluciones de (con $\lambda_m \neq \lambda_{\tilde m}$, $\forall m \neq \tilde m$)

$$(*)\begin{cases} \Delta u = -\lambda u & \text{en } U \\ u|_{\partial U} = 0 & (u \in C^2(\bar U)) \end{cases},$$

y que $\{\phi_m^i : i=1,\dots,M_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es b.o.n. de $C(\bar U)$ con respecto al P.P.e $\langle f, g\rangle = \int_U \overline{f(x)}\, g(x)\, dV$. Luego, si (ϕ, λ) es soluc de $(*)$ ($\phi \neq 0$) $\Rightarrow$ $\lambda = \lambda_K$ para algún $K \in \mathbb{N}$ y $\phi = \sum_{j=1}^{M_K} c_j \phi_K^j$ para ciertos $c_j \in \mathbb{C}$.

D// Si $f, g \in C^2(\bar U)$ y $f|_{\partial U} = g|_{\partial U} = 0 \underset{\text{(GREEN)}}{\Rightarrow} \langle \Delta f, g\rangle = \langle f, \Delta g\rangle$.

Luego $\langle \underbrace{\Delta \phi}_{-\lambda\phi}, \phi_m^i\rangle = \langle \phi, \underbrace{\Delta \phi_m^i}_{-\lambda_m \phi_m^i}\rangle \Rightarrow (\lambda - \lambda_m)\langle \phi, \phi_m^i\rangle = 0$, $\forall m \in \mathbb{N}$. ($\forall i=1,\dots,M_m$)

Como $\phi \neq 0 \Rightarrow \exists K, j / \langle \phi, \phi_K^j\rangle \neq 0 \Rightarrow \lambda = \lambda_K$. Si $\langle \phi, \phi_m^i\rangle \neq 0$ para algún $m \neq K \Rightarrow \lambda = \lambda_m = \lambda_K$ ABS $\therefore$ los únicos coef. de Fourier no nulos de ϕ son $c_j = \langle \phi, \phi_K^j\rangle$. La suma de Fourier de ϕ, $\sum_{j=1}^{M_K} c_j \phi_K^j$, es finita $\therefore \int_U |\phi(x) - \sum_{j=1}^{M_K} c_j \phi_K^j(x)|^2 dV = 0$, pues tal suma converge en media a ϕ, y como tanto ϕ como las ϕ_K^j son funciones continuas, la única posibilidad es que $\phi(x) = \sum_{j=1}^{M_K} c_j \phi_K^j(x)$, $\forall x \in \bar U$. //