Teorema 3: Dado $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y acotado, ∂U cumpliendo con ① la cond. de la esfera exterior, $f \in C^1(U) \cap C^0(\bar{U})$ y $g \in C^0(\partial U)$, el problema

(DP) $\begin{cases} \Delta u = -f & \text{en } U \\ u|_{\partial U} = g \end{cases}$ tiene una única soluc. en $C^2(U) \cap C^0(\bar{U})$.

D// (DP) $= \begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{\partial U} = g \end{cases} + \begin{cases} \Delta u = -f \\ u|_{\partial U} = 0 \end{cases}$

TEO 1 $\Rightarrow u_1$ ¿u_2?

Para cada $y \in U$, consideremos el problema $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } U \\ u(x) = \Phi(x-y), & \forall x \in \partial U \end{cases}$

Por TEO 1, $\exists !$ solución $\forall y \in U$: ϕ^y.

Definamos $G(x,y) \overset{(A)}{=} \Phi(x-y) - \phi^y(x)$, $\forall x \in \bar{U}$, $y \in U$ con $x \neq y$.

Si $y \in \partial U$, definamos $\overset{(B)}{} G(x,y) = 0$, $\forall x \in \bar{U}$, $x \neq y$.

Es claro que $G(x,y) \overset{(A)}{=} 0$, $\forall x \in \partial U$, $\forall y \in \bar{U}$ $(x \neq y)$. Luego

$u_2(x) \equiv \int_U G(x,y) f(y)\, dV_y = \underbrace{\int_U \Phi(x-y) f(y)\, dV_y}_{\text{(impropia)}} - \underbrace{\int_U \phi^y(x) f(y)\, dV_y}_{\text{(propia)}}$

Cumple $\boxed{u_2|_{\partial U} = 0}^{(A)}$ y $\Delta u_2(x) = \underbrace{\Delta \int_U \Phi(x-y) f(y)\, dV_y}_{\text{TEO 2} \quad -f(x)} - \int_U \underbrace{\Delta \phi^y(x)}_{=0} f(y)\, dV_y$

$\Rightarrow \boxed{\Delta u_2 = -f}$ //

Definición: La función $G: \bar{U} \times \bar{U} - D_{\bar{U}} \to \mathbb{R}$ dada por (A) y (B) se conoce como función de Green de Δ en U. $(D_{\bar{U}} = \{(x,y) \in \bar{U} \times \bar{U} \,/\, x = y\})$

OBS: ① Puede verse (bajo ciertas hipótesis) que

si $\begin{cases} \Delta u = -f & \text{en } U \\ u|_{\partial U} = g \end{cases} \Rightarrow u(x) = \int_U G(x,y) f(y)\, dV_y - \int_{\partial U} \frac{\partial G}{\partial \hat{n}_y}(x,y)\, g(y)\, dS_y$

(Ej optativo)

(2) $u(x) = \int_U G(x,y) f(y)\, dV_y \Rightarrow -\Delta u(x) \overset{?}{=} \int_U \underbrace{-\Delta G(x,y)}\, f(y)\, dV_y$

$$\underset{f(x)}{\parallel} \qquad \parallel \qquad \underbrace{= \begin{cases} 0 & x \neq y \\ \infty & x = y \end{cases}}_{\sim \delta(x-y)} \; !$$

$\boxed{\text{DELTA DE DIRAC}}$

$-\Delta G(x,y) = \delta(x-y)$ es válido en el contexto de <u>distribuciones</u>.

(3) $U \subseteq \mathbb{R}^n$, L op diferencial

Si $G(x,y)$ cumple $\begin{cases} L_x G(x,y) = \delta(x-y), & \forall x \in U \\ G(x,y) = 0, & \forall x \in \partial U \end{cases}$ $(\forall y \in U)$

se dice que G es la <u>función de Green de L en U</u>

Luego, el problema $\begin{cases} Lu = -f & \text{en } U \\ u|_{\partial U} = 0 \end{cases}$ tiene solución

$u(x) = \int_U G(x,y) f(y)\, dV_y$

(4) Definiendo $\mathcal{G} \,/\, (\mathcal{G}f)(x) = \int_U G(x,y) f(y)\, dV_y \Rightarrow$

$L \circ \mathcal{G} = id \quad \therefore \quad$ "$\mathcal{G} = L^{-1}$"

(5) ¿Cómo calcular G? - Método de imágenes (EVANS, 36-41)
- Separación de variables
- Técnicas con distribuciones. (STRICHARTZ)

(1) $\mathbb{R}^n \supseteq \Omega$

Distribuciones (GRIFFEL, STRICHARTZ)

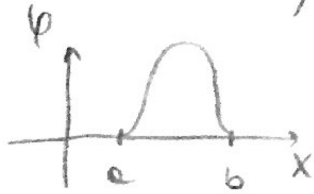
Se trata de t.l. $T:\mathcal{P}\to\mathbb{R}$, siendo $\mathcal{P}$ (de Prueba) un espacio de funciones s/Ω.

Generalizan las t.l. de la forma $T(\varphi)=\int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,dV$, definidas por algún $f\in\mathcal{I}'(\Omega)$.

¿Qué es $\mathcal{P}$?

Definición: Se dice que $\varphi:\Omega\to\mathbb{R}$ es una función de prueba si $\varphi\in C^\infty(\Omega)$ y sop φ es compacto. Al conjunto de tales funciones lo denotaremos $\mathcal{P}_\Omega$ ó simplem/ $\underline{\underline{\mathcal{P}}}$. (OBS: En realidad se lo denota ⊛ $\underline{\underline{\mathcal{D}}}$.)

Ej Si $n=1$, $\varphi(x)=\begin{cases}\exp(-1/|x-a||x-b|), & x\in(a,b)\\ 0, & x\notin(a,b)\end{cases}$



pertenece a $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}$.

OBS: $\mathcal{P}$ es un $\mathbb{R}$-ev de dim ∞.

Definición: Diremos que $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{P}$ converge a $\varphi\in\mathcal{P}$ en el sentido de $\mathcal{P}$ si ① $\exists K\subseteq\Omega$ compacto / sop $\varphi_n\subseteq K$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

$(\varphi_n \xrightarrow[\mathcal{P}]{} \varphi)$ ② $D^{(\alpha)}\varphi_n \rightrightarrows D^{(\alpha)}\varphi$, $\forall\alpha$.

Definición: Una distribución (ó función generalizada) es una t.l $T:\mathcal{P}\to\mathbb{R}$ / si $\varphi_n\xrightarrow[\mathcal{P}]{}\varphi$ $\Rightarrow T(\varphi_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}T(\varphi)$ (continuidad). Denotaremos $\underline{\underline{\mathcal{D}}}$ el conj de dist

OBS: $\mathcal{D}$ es un $\mathbb{R}$-ev de dim ∞. (Se lo denota $\underline{\underline{\mathcal{D}'}}$ = "dual" de $\mathcal{D}$) ⊛

Ej ① Dada $f\in\mathcal{I}'(\Omega)$, la t.l. $T_f:\mathcal{P}\to\mathbb{R}$ / $T_f(\varphi)=\int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,dV$ es una distribución. Se la llama dist. regular asociada a f.

(ii) Delta de Dirac: Dado $x \in \Omega$, $\delta_x : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ /

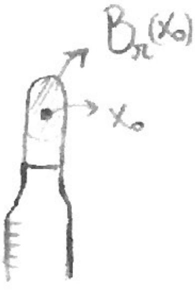
$\delta_x(\varphi) = \varphi(x)$ es una distribución. Puede verse que no es regular ($\nexists f \,/\, \delta_x = T_f$).

OBS: A veces se escribe "$\underbrace{\int_\Omega \delta_x(y)\,\varphi(y)\,dV_y}_{\delta_x(\varphi)}$" $= \varphi(x)$. Es sólo una notación.

(No tiene sentido integrar δ.)

Interpretación física (STRICHARTZ)

$t^\circ : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (temperatura) $\xrightarrow[\text{en } x_0]{\text{medición}}$ $t^\circ(x_0)$



En realidad uno mide "$t^\circ(B_r(x_0))$" $= \int_\Omega t^\circ(x)\,\varphi(x)\,dV$

siendo φ / sop $\varphi = \overline{B_r(x_0)}$ y $\int_\Omega \varphi(x)\,dx = 1$. → (promedio)

↳ $T : \mathcal{D} \to \mathbb{R} \xrightarrow[\text{en } U]{\text{medición}} T(\varphi)$, con sop $\varphi = \overline{U}$

↳ (termómetro puesto en U)

linealidad ↔ promedio (la medición en $U = \bigcup_{i=1}^n U_i$ debería cumplir $\varphi = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \varphi_i$ $T(\varphi) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n T(\varphi_i)$)

continuidad ↔ termómetros parecidos ($\|\varphi - \varphi'\| \to 0$) ⇒ mediciones parecidas ($|T(\varphi) - T(\varphi')| \to 0$)

Derivada de una distribución

Si $f \in C^1(\mathbb{R})$ y $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ ⇒ $\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,\varphi(x)\,dx \overset{\text{(partes)}}{=} \underbrace{f(x)\cancel{\varphi(x)}\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{\text{(sop. compacto)}} -$

$- \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi'(x)\,dx \quad \therefore \quad T_{f'}(\varphi) = -T_f(\varphi')$

Definición: Dado una dist. $T : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, se define su derivada

$\partial_{x_i} T : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ como la t.l. que cumple $\partial_{x_i} T(\varphi) = -T(\partial_{x_i}\varphi)$. ③

OBS: - Puede verse que $\partial_{x_i} T$ es también una dist.

- Para una variable: $T'(\varphi) = -T(\varphi')$.
- " derivadas de orden superior: $T^{(k)}(\varphi) = (-1)^k T(\varphi^{(k)})$.
- En varias variables: $(D^\alpha T)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi)$.
- Ojo: si $f \notin C^1 \Rightarrow (T_f)'$ y $T_{f'}$ pueden diferir.
- Dado $F \in \mathcal{D}, \exists T / T' = F$ (PRIMITIVA) ($T' = 0 \Leftrightarrow T = c \equiv T_c$) cte

④ ⓘ $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / H(x) = \begin{cases} 1 & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$ (función de Heaviside (o escalón))

Notar que $H, H' \in G$ y $H'(x) = 0, \forall x \neq 0$. Luego $\boxed{T_{H'} \equiv 0}$, pues $\int_{-\infty}^{+\infty} H'(x)\varphi(x)\,dx = 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}$. Pero $(T_H)'(\varphi) = -T_H(\varphi') =$

$= -\int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_0^\infty \varphi'(x)\,dx = -\varphi(x)\Big|_0^\infty = \varphi(0) = \delta_0(\varphi)$ ∴

$\boxed{(T_H)' = \delta_0}$. A veces se escribe "$H' = \delta_0$", pero la prima ahí significa <u>derivada distribucional</u>.

ⓘⓘ ¿δ_0'? $\delta_0'(\varphi) = -\delta_0(\varphi') = -\varphi'(0)$ ∴

$\delta_0^{(k)}(\varphi) = (-1)^k \varphi^{(k)}(0)$, y en gral. $(D^\alpha \delta_x)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi(x)$.

OBS: - Derivada distribucional ⇝ E.D.P p/ distribuciones.

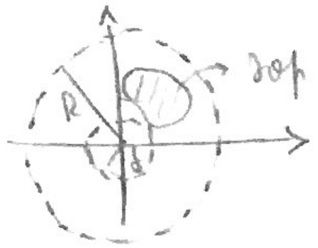
- En lugar de buscar $u \in C^2(U) \cap C^0(\bar{U})$ / $\Delta u = f$ en U, para $f : \bar{U} \to \mathbb{R}$, podemos buscar $T \in \mathcal{D}_U' / \Delta T = F$, para $F \in \mathcal{D}_U'$.

(solución débil)

Ⓐ Veamos que "$\Delta \Phi = -\delta_0$ en $\mathbb{R}^n$", en el sentido distribucional.

O sea, veamos que $\Delta T_\Phi = -\delta_0$. Por un lado $T_\Phi(\varphi) =$

$= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x)\,\varphi(x)\,dV = \lim_{\delta\to 0}\int_{B_R(0)-B_\delta(0)} \Phi(x)\,\varphi(x)\,dV$. Luego,



$$\Delta T_\Phi(\varphi) = T_\Phi(\Delta\varphi) = \lim_{\delta\to0}\int_{B_R(0)-B_\delta(0)}\Phi(x)\,\Delta\varphi(x)\,dV =$$

$$= -\varphi(0) = -\delta_0(\varphi) \quad \Rightarrow \quad \Delta T_\Phi = -\delta_0 \text{ ó } \text{"}\Delta\Phi = -\delta_0\text{"}.$$

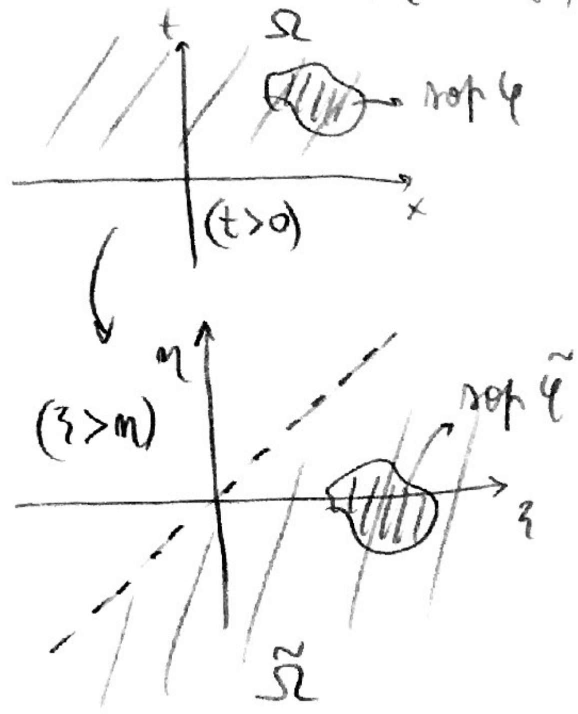
(clase 06/03)

Ⓑ Veamos que $u(x,t) = \frac{1}{2}\left[g(x+t)+g(x-t)+\int_{x-t}^{x+t} h(s)\,ds\right]$ cumple, en el sentido distribucional, que $\Box u = 0$, aún cuando $g\notin C^2$ o $h\notin C^1$.

Qvq $\Box T_u = 0$, ie $\Box T_u(\varphi)=0$, $\forall\varphi\in\mathcal{D}_{\overset{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{>0}}{\Omega}}$:

$$\Box T_u(\varphi) = T_u(\Box\varphi) = \int_\Omega u(x,t)\,\Box\varphi(x,t)\,dx\,dt = \begin{pmatrix}\xi = x+t\\ \eta = x-t\end{pmatrix}$$

$$= \int_{\tilde\Omega} \underbrace{\tilde u(\xi,\eta)}_{\alpha(\xi)+\beta(\eta)}\, 2\,\frac{\partial^2\tilde\varphi}{\partial\eta\,\partial\xi}(\xi,\eta)\,\frac{d\xi\,d\eta}{2}$$



$$= \int_{-\infty}^{+\infty}d\xi\int_{-\infty}^{\xi}d\eta\;\alpha(\xi)\,\frac{\partial^2\tilde\varphi}{\partial\eta\,\partial\xi}(\xi,\eta) + \dots\,\beta(\eta)\dots$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}d\xi\;\alpha(\xi)\underbrace{\int_{-\infty}^{\xi}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\tilde\varphi}{\partial\xi}(\xi,\eta)\right)d\eta}_{\underset{0}{\cancel{\partial\tilde\varphi/\partial\xi\,(\xi,\xi)}} - \underset{0}{\cancel{\partial\tilde\varphi/\partial\xi\,(-\infty,\xi)}}} + \dots$$

$$\Rightarrow \Box T_u(\varphi)=0,\ \forall\varphi \Rightarrow \Box T_u = 0 \text{ ó } \text{"}\Box u = 0\text{"}.$$