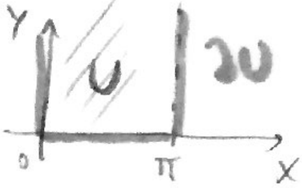
OBS: ¿Qué pasa si U no es acotado?

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } U = (0,\pi)\times(0,\infty) \\ u|_{\partial U} = 0 \end{cases}$$



$u \equiv 0$ es solución, y $u(x,y) = \sin x \,\operatorname{sh} y$ también!

Continuidad ($U \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto y acotado)

Teorema 1: Si $u_1, u_2 \in C^2(U) \cap C^0(\bar{U})$ son soluc. de $\begin{cases} \Delta u = F_1 \\ u|_{\partial U} = g_1 \end{cases}$ ^ $\begin{cases} \Delta u = F_2 \\ u|_{\partial U} = g_2 \end{cases}$ respectiva/ y si F_1, F_2, g_1 y g_2 son acotadas:
$|u_1(x) - u_2(x)| \leq \sup_{\partial U} |g_1 - g_2| + \sup_{U} |F_1 - F_2| \, R^2/_{2n}$, $\forall x \in \bar{U}$, para algún $R > 0$.

D// Sea u solución de $\begin{cases} \Delta u = F \text{ en } U \\ u|_{\partial U} = g \end{cases}$, con F y g acotadas. Definamos

$v_{\pm} = \pm u + \sup|F|/_{2n} \sum_{i=1}^n x_i^2$. Luego $\Delta v_{\pm} = \pm \underbrace{\Delta u}_{F} + \sup|F| \geq 0$

en todo $U \Rightarrow \max_{\bar{U}} v_{\pm} = \max_{\partial U} v_{\pm}$. Además, como $\pm u(x) \leq v_{\pm}(x)$,
$\forall x \in \bar{U}$, $|u(x)| \leq v_{\pm}(x) \leq \max_{\partial U} v_{\pm} = \max_{\partial U} \left(\pm u + \sup|F| \sum_{i=1}^n x_i^2/_{2n}\right) \leq$

$\leq \underbrace{\max_{\partial U} |u|}_{\max_{\partial U}|g|} + \sup|F| \, R^2/_{2n}$, con R / $B_R(0) \supseteq U$. //

OBS: Los teoremas de unicidad (a menos de una cte) y continuidad también son válidos p/ (NP). Ver COURANT-HILBERT, 329.
Se pide que $u \in C^2(U) \cap C^1(\bar{U})$.

Otras propiedades de las funciones armónicas

⊙ **Valor medio** • Si $u \in C^0(U)$ y cumple la propiedad del valor medio

i.e. $u(y) = (\text{Area}(\partial B_r(y)))^{-1} \int_{\partial B_r(y)} u(x)\, dS_x \quad , \forall y \in U, \forall r>0 \,/\, \overline{B_r(y)} \subseteq U$,

luego $u \in C^\infty(U)$ y $\Delta u = 0$ en U. $\left(= \int_{\partial B_r(0)} dS = \frac{2\pi^{n/2} \times r^{n-1}}{\Gamma(n/2)} \right)$, ω_n
(EVANS, 25)

• Recíprocamente, si $u \in C^2(U)$ y $\Delta u = 0$ en $U \Rightarrow u$ cumple la prop. del valor medio.

OBS: 1) Es la generalización a $\mathbb{R}^n$ de la fórmula de Cauchy.

2) Si $u \in C^2(U)$ y $\Delta u = 0$ en $U \Rightarrow u \in C^\infty(U)$. Esto generaliza a $\mathbb{R}^n$ lo que se tiene para funciones holomorfas:

holomorfa $\Rightarrow$ infinitamente derivable.

$\rightsquigarrow$ O sea, ARMÓNICA en $\mathbb{R}^n$ "generaliza" HOLOMORFA en $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

⊙ **Teorema de Liouville** $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ acotada y $\Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^n \Rightarrow u$ es cte.

Aplicación. Queremos resolver (*) $\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } U & ① \\ u|_{\partial U} = g \text{ (acotada)} & ② \end{cases}$ (en $C^2(U) \cap C^0(\overline{U})$). Supongamos que conocemos $u_N \in C^2(U) \cap C^0(\overline{U}) \,//\, \begin{cases} \Delta u_N = 0 \\ u_N|_{\partial U} = g_N \end{cases}$ con $g_N \rightrightarrows g$. ¿Sería cierto $\lim_{N\to\infty} u_N$ resuelve (*)? De la propiedad de continuidad $|u_N - u_M| \leq \sup |g_N - g_M|$. Como g_N es unif. de Cauchy $\Rightarrow u_N$ también $\Rightarrow \exists \tilde{u} \,/\, u_N \rightrightarrows \tilde{u}$. OBS: Es claro que $\tilde{u} \in C^0(\overline{U})$. ¿Resuelve (*)?

1) Como $u_N|_{\partial U} = g_N$ y $g_N \to g \Rightarrow u_N|_{\partial U} \to g$. Por otro lado, $u_N|_{\partial U} \to \tilde{u}|_{\partial U}$. Luego, $\boxed{\tilde{u}|_{\partial U} = g}$.

2) Como $\Delta u_N = 0$ en $U \underset{\text{(V. MEDIO)}}{\Rightarrow} u_N(y) = \dfrac{1}{\omega_n r^{n-1}} \displaystyle\int_{\partial B_r(y)} u_N(x)\, dS_x \Rightarrow$

$$\tilde{u}(y) = \lim_{N\to\infty} u_N(y) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(y)} u_N(x)\, dS_x = \text{(CONV. UNIF)}$$

$$= \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(y)} \underbrace{\left(\lim_{N\to\infty} u_N(x)\right)}_{\tilde{u}(x)} dS \underset{\text{(V. MEDIO)}}{\Rightarrow} \boxed{\Delta \tilde{u} = 0} \text{ en } U.$$

$\hookrightarrow$ OBS: $\tilde{u} \in C^\infty(U) \subset C^2(U)$

Luego $\tilde{u} = \lim_{N\to\infty} u_N$ es la solución de (*) en $C^2(U) \cap C^0(\bar{U})$.

Ej) Usando sep. var. para Dirichlet $(\Delta u = 0,\ u|_{\partial\Omega} = g)$, uno encuentra

$$u_N \,/\, \begin{cases} \Delta u_N = 0 \\ u_N|_{\partial\Omega} = g_N \end{cases}, \quad \text{con } g_N = S_N^{(g)} \text{ (suma de F. de } g\text{)}.$$

Por ende, si $S_N^{(g)} \rightrightarrows g$, el límite de u_N es solución!