(1)

- Resolvimos Dirichlet en paralelepípedos. Preguntas:

¿Unicidad? ¿ $\underbrace{\text{Otras regiones? ¿Inhomogeneidades? ¿Otras C.B.?}}$

<u>Dirichlet / Poisson</u> (DP) y <u>Neumann / Poisson</u> (NP)

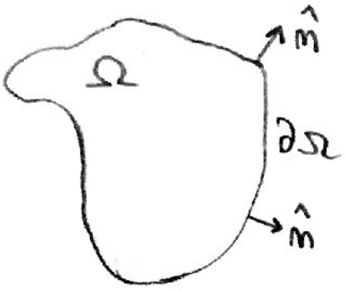
- <u>Ecuación de Poisson</u>: $\Delta u = F$ (Laplace inhomogénea)

- (DP) $\begin{cases} \Delta u = F \text{ en } \Omega \subseteq \mathbb{R}^n & (F : \Omega \to \mathbb{R}) \\ u|_{\partial\Omega} = g & (g : \partial\Omega \to \mathbb{R}) \end{cases}$

¿ $\underline{u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})}$?

($f \in C^k(\overline{\Omega})$ si $f \in C^k(W)$ para W abierto / $\overline{\Omega} \subseteq W$)

- (NP) $\begin{cases} \Delta u = F \text{ en } \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \\ \underbrace{\partial u / \partial \hat{n}}_{\hat{n} \cdot \nabla u|_{\partial\Omega}} = g \end{cases}$



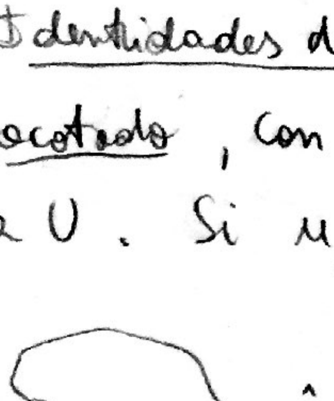
¿ $\underline{u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})}$?

<u>OBS</u>: Por linealidad

$$\text{(DP)}_{F,g} = \underbrace{\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}}_{\text{(DP)}_{0,g} = \text{(D)}_g} + \underbrace{\begin{cases} \Delta u = F \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}}_{\text{(DP)}_{F,0}}$$

(Idem (NP)) $\qquad u = u_1 + u_2$

<u>Identidades de Green</u>: Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y <u>acotado</u>, con ∂U de clase C^1 a trozos(*). Sea $\hat{n}$ la normal exterior a U. Si $u, v \in C^2(\overline{U})$ (i.e. $\exists W$ abierto / $\overline{U} \subseteq W$, $u, v \in C^2(W)$) $\Rightarrow$



ⓐ $\displaystyle\int_{\partial U} v \, \partial u / \partial \hat{n} \, dS = \int_U (\nabla v \cdot \nabla u + v \Delta u) \, dV$

ⓑ $\displaystyle\int_{\partial U} (v \, \partial u / \partial \hat{n} - u \, \partial v / \partial \hat{n}) \, dS = \int_U (v \Delta u - u \Delta v) \, dV$

ⓒ $\displaystyle\int_{\partial U} u \, \hat{n} \, dS = \int_U \nabla u \, dV$

(*) (Peral-Alonso, 2.8)

Proposición 1: Si $u \in C^2(\bar{U})$ es soluc. de $(NP)_{F,g} \Rightarrow \int_{\partial U} g\, dS = \int_U F\, dV$.

D// Poner $v \equiv 1$ y u / $\Delta u = F \wedge \partial u/\partial \hat{n} = g$ en (a). //

Teorema 2: Cada problema de (DP) en U (resp. (NP) en U conexo) tiene a lo sumo una única soluc. (resp. a menos de una cte.) en $C^2(\bar{U})$.

D// (DP) Si $u_1, u_2 \in C^2(\bar{U})$ son soluc de $(DP)_{F,g} \Rightarrow u_1 - u_2$ cumple $\Delta(u_1-u_2) = 0 \wedge (u_1-u_2)|_{\partial U} = 0$. De (a) se sigue, para $u = v =$
(en U)

$= u_1 - u_2$ que $0 = \int_U \|\nabla(u_1-u_2)\|^2\, dV \Rightarrow \nabla(u_1-u_2) = 0$ en U

$\Rightarrow u_1 - u_2 =$ cte. en U. Como $(u_1-u_2)|_{\partial U} = 0 \Rightarrow$ por continuidad $u_1 - u_2 = 0$ en $\bar{U}$. (una cte x componente conexa)

(NP) Si $u_1, u_2 \in C^2(\bar{U})$ resuelven $(NP)_{F,g}$ en $U \Rightarrow \Delta(u_1-u_2) = 0$ en U y $\partial/\partial \hat{n}\,(u_1-u_2) = 0$. De nuevo, de (a) se tiene que $u_1 - u_2 =$ cte //

- ¿Y si $u \in C^2(U) \cap C^0(\bar{U})$, qué se puede decir?

Principio del máximo (mínimo)

Teorema 3: Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y acotado. Sea $u \in C^2(U) \cap C^0(\bar{U})$ / $\Delta u \geq 0$ (resp $\Delta u \leq 0$) en U. Luego $\boxed{\max_{\bar{U}} u = \max_{\partial U} u}$ (resp $\min_{\bar{U}} u = \min_{\partial U} u$)

OBS: $\max_{\bar{U}} u \geq \max_{\partial U} u$ ∴ basta ver que $\max_{\bar{U}} u \leq \max_{\partial U} u$.

D// Como $u \in C^0(\bar{U}) \Rightarrow$ tiene máximo en $\bar{U}$.

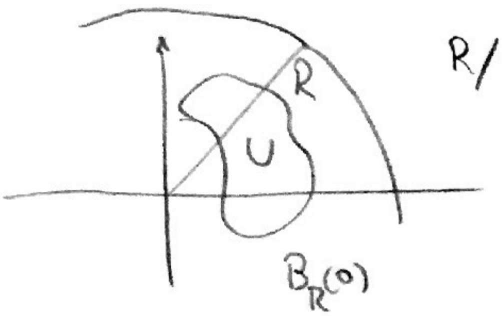
① Sea $v : \bar{U} \to \mathbb{R}$, $v \in C^2(U) \cap C^0(\bar{U})$, $\Delta v > 0$ en U. Si v alcanza su máximo en $x_0 \in U \Rightarrow \partial_i^2 v(x_0) \leq 0 \Rightarrow \Delta v(x_0) \leq 0$ ABS

Luego v alcanza su máximo en ∂U, o sea $\max_{\bar{U}} v = \max_{\partial U} v$.

② Sea $v = \underset{\text{(del TEO)}}{u} + \frac{1}{2Nm} \sum_{i=1}^{m} x_i^2$, con $N \in \mathbb{N}$. Es claro que $v \in C^2(U) \cap C^0(\bar{U})$ y que $\Delta v = \underbrace{\Delta u}_{\geq 0} + \frac{1}{N} > 0$ en U. Además

$u(x) \leq v(x)$, $\forall x \in \bar{U}$. Luego, $u(x) \leq v(x) \leq \max_{\partial U} v =$

$= \max_{\partial U} \left(u + \frac{1}{2Nm} \sum_{i=1}^{m} x_i^2 \right) \leq \max_{\partial U} u + \underbrace{\max_{\partial U} \left(\frac{1}{2Nm} \sum_{i=1}^{m} x_i^2 \right)}_{\leq \frac{1}{2Nm} R^2}$, $\forall x \in \bar{U}$,



$R / \bar{U} \subseteq B_R(0)$

$\Rightarrow \max_{\bar{U}} u \leq \max_{\partial U} u + \frac{R^2}{2Nm}$, $\forall N \in \mathbb{N}$ $(R, m \text{ fijos})$

$\underset{(N \to \infty)}{\Rightarrow} \max_{\bar{U}} u \leq \max_{\partial U} u$. //

Unicidad $\quad (u \in C^2(\bar{U}) \rightsquigarrow u \in C^2(U) \cap C^0(\bar{U}))$

Teorema 4: Dado $U \subseteq \mathbb{R}^m$ abierto y acotado, $F: U \to \mathbb{R}$, $g: \partial U \to \mathbb{R}$, el problema $\begin{cases} \Delta u = F \text{ en } U \\ u|_{\partial U} = g \end{cases}$ tiene a lo sumo 1 soluc $u \in C^2(U) \cap C^0(\bar{U})$.

D// Si u_1, u_2 son dos soluciones $\Rightarrow \Delta(u_1 - u_2) = 0$ en U, $(u_1 - u_2)|_{\partial U} = 0$. Del ppio del máx se sigue que $u_1 - u_2 \leq 0$ en $\bar{U}$, y del mínimo que $u_1 - u_2 \geq 0$ en $\bar{U} \Rightarrow u_1 = u_2$ en $\bar{U}$. //