Armónicos Esféricos

Queremos estudiar el siguiente problema (ver Ej. 11, P. 2)

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } U = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 < 1\} \\ u = g & \text{en } \partial U \end{cases}$$

Por la geometría del dominio U (que es la bola unitaria de $\mathbb{R}^3$) conviene trabajar en coord. esféricas:

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\phi \\ y = r \sin\theta \sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \phi \in [0, 2\pi) \\ \theta \in [0,\pi] \\ r > 0. \end{array}$$

Si hacemos el cambio de variables $v(r,\theta,\phi) = u(x,y,z)$, entonces vemos que v verifica la ecuación (con cond. borde)

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \dfrac{\partial v}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\Delta_{S^2} v = 0 \\ v(1,\theta,\phi) = \underset{\tilde{g}(\theta,\phi)}{\underset{\shortparallel}{g(\sin\theta\cos\phi, \dots)}} \end{cases} \qquad (LE)$$

donde $\Delta_{S^2} v = \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \dfrac{\partial v}{\partial \theta}\right) + \dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 v}{\partial\phi^2}$.

[Esto es lo que pide el Ej 11(a), P. 2].

¿Qué tipo de soluciones esperamos obtener? Veamos la analogía de este problema con el del Laplaciano en coord. polares (en la bola unitaria de $\mathbb{R}^2$).

Laplaciano en polares

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } U = \{x^2+y^2<1\} \\ u = g & \text{en } \partial U \end{cases}$$

Cambio a polares:

$$v(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\Delta_{S^1} v = 0$$

donde $\Delta_{S^1} v = \dfrac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}$

Familia soluc.: $\begin{cases} r^k\cos(k\theta) \\ r^k\sin(k\theta) \end{cases}$ $k \in \mathbb{N}_0$

$\cos(k\theta)$, $\sin(k\theta)$ son autofunciones de Δ_{S^1} de autovalor $-k^2$, y forman una base de $L^2(S^1)$, lo cual permite ajustar condic. de borde.

Laplaciano en esféricos

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } U = \{x^2+y^2+z^2<1\} \\ u = g & \text{en } \partial U \end{cases}$$

Cambio a esféricos:

$$v(r,\theta,\phi) = u(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\Delta_{S^2} v = 0$$

donde $\Delta_{S^2} v = \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial v}{\partial \theta}\right) + \dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 v}{\partial \phi^2}$.

Familia soluc.:

$$\begin{cases} r^k\cos(m\phi)\,P_k^m(\cos\theta) \\ r^k\sin(m\phi)\,P_k^m(\cos\theta) \end{cases}$$

$k \in \mathbb{N}_0$, $0 \le m \le k$.

$\cos(m\phi)P_k^m(\cos\theta)$, $\sin(m\phi)P_k^m(\cos\theta)$ son autofunciones de Δ_{S^2} de autovalor $-k(k+1)$ y forman una base de $L^2(S^2)$, lo cual permite ajustar datos de borde

---

Resolvemos (LE). por separación de variables.

$$u(r,\theta,\phi) = R(r)\,\Theta(\theta)\,\Phi(\phi).$$

Dado que v tiene que verificar la ec. en (LE), se deduce que:

$$r^2\sin^2\theta \underbrace{\frac{R''+\frac{2}{r}R'}{R} + \sin\theta\,\frac{(\sin\theta\,\Theta')'}{\Theta}}_{G(r,\theta)} + \underbrace{\frac{\Phi''}{\Phi}}_{\text{sólo depende de } \phi} = 0$$

Entonces $G(r,\theta) = -\dfrac{\Phi''}{\Phi} = \lambda.$

Mirando $-\dfrac{\Phi''}{\Phi} = \lambda$ y notando que Φ debe ser periódico (i.e. $\Phi(0)=\Phi(2\pi)$), se obtiene:

$$\lambda = m^2 \text{ con } m\in\mathbb{N}_0 , \quad \Phi_m(\phi) = \begin{cases}\cos(m\phi)\\ \sin(m\phi)\end{cases}$$

Ahora, para cada m resolvemos:

$$G(r,\theta) = m^2.$$

Esto nos lleva a

$$\frac{R''+\frac{2}{r}R'}{R} + \frac{(\sin\theta\,\Theta')'}{\Theta\, r^2\sin\theta} - \frac{m^2}{r^2\sin^2\theta} = 0$$

y, en consecuencia,

$$r^2\left(\frac{R''+\frac{2}{r}R'}{R}\right) = -\frac{(\sin\theta\,\Theta')'}{\Theta\sin\theta} + \frac{m^2}{\sin^2\theta} = \mu$$

para alguna cte μ.

Vamos a mirar primero la ec. en θ, que resulta ser un problema de Sturm-Liouville (singular).

Haciendo el cambio de variable $t = \cos\theta$ (notar que $-1 < t < 1$ ya que $0 < \theta < \pi$), $P(t) = \Theta(\theta)$ (i.e $\Theta(\theta) = P(\cos\theta)$) se obtiene

$$((1-t^2)P')' - \frac{m^2}{1-t^2}P + \mu P = 0 \qquad -1 < t < 1.$$

CASO $m = 0$

$$((1-t^2)P')' + \mu P = 0 \qquad -1 < t < 1$$

Esta es la ecuación de Legendre. Las soluciones acotadas a esta ecuación (para ciertos μ) serán los polinomios de Legendre (este es un problema de Sturm-Liouville singular, pues $(1-t^2)$ se anula en $t = \pm 1$).

Se propone la solución $P(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j$ y, reemplazando en la ecuación,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left[(j+2)(j+1) a_{j+2} - (j(j+1) - \mu) a_j \right] t^j = 0$$

$$\Rightarrow \quad a_{j+2} = \frac{j(j+1) - \mu}{(j+2)(j+1)} a_j \qquad \Delta$$

Esto deja libres a_0 y a_1, mientras que el resto de los coef. quedan determinados por la recurrencia.

Poniendo $a_1 = 0$ y $a_0 \neq 0$ ó $a_0 = 0$ y $a_1 \neq 0$,

$$v_1 = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j} t^{2j}$$

$$v_2 = a_1 t + \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j+1} t^{2j+1}$$

Se puede probar (mediante crit. D'alembert) que, en el caso en que v_1, v_2 NO sean polinomios, hay convergencia en $-1 < t < 1$ y divergencia. Y también se puede ver que hay divergencia en $t = \pm 1$.

Dado que buscamos soluciones acotadas, vamos a elegir μ de forma tal que v_1, v_2 sean polinomios.

Si $\mu = n(n+1)$, por la recurrencia Ⓐ, $a_{n+2} = 0$ y en consecuencia $a_{n+4} = a_{n+6} = \cdots = 0$.

Luego,

I) Si n par y $\mu = n(n+1)$:

v_1 es un polinomio $\rightsquigarrow P_n$

v_2 es una serie $\rightsquigarrow Q_n$

Las soluciones Q_n se descartan por ser no acotadas.

II) Si n impar y $\mu = n(n+1)$:

v_2 es un polinomio $\rightsquigarrow P_n$

v_1 es una serie $\rightsquigarrow Q_n$

Mismo comentario sobre Q_n.

En definitivo, los soluciones acotados de

$$((1-t^2)P')' + n(n+1)P = 0$$

están dados por:

$$P_n(t) = a_0 + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n \quad (a_n \neq 0) \quad \text{si } n \text{ par}$$

$$P_n(t) = a_1 t + a_3 t^3 + \cdots + a_n t^n \quad (a_n \neq 0) \quad \text{si } n \text{ impar.}$$

Los ctes a_0 y a_1 son arbitrarios, el resto quedan determinados por la recurrencia (A).

Si se eligen a_0, a_1 tales que $P_n(1) = 1$, se obtienen los <u>polinomios de Legendre</u>.

<u>Obs</u> En definitivo el polinomio de Legendre de grado n, $P_n(t)$, es la única solución polinómica de

$$((1-t^2)P')' + n(n+1)P = 0$$

tal que $P_n(1) = 1$.

(en el Ej. 9, P2, hay algunos propiedades de estos polinomios)

<u>Obs</u> los primeros polinomios de Legendre:

$$P_0 = 1, \quad P_1 = t, \quad P_2 = \frac{1}{2}(3t^2-1), \quad P_3 = \frac{1}{2}(5t^3-3t), \ldots$$

Recopitulando

Si $u = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ solución de (LE), entonces

$$\Phi_m(\phi) = \begin{cases} \cos(m\phi) \\ \sin(m\phi) \end{cases} \qquad m \in \mathbb{N}_0$$

$\Theta(\theta) = P(\cos\theta)$ con P satisfaciendo

$$((1-t^2)P')' - \frac{m^2}{1-t^2}P + \mu P = 0 \qquad -1<t<1$$

$$\frac{r^2\left(R'' + \frac{2}{r}R'\right)}{R} = \mu .$$

esta ec. la resolvimos cuando $m=0$, obteniendo las soluciones P_n con $\mu = n(n+1)$, $n \in \mathbb{N}_0$

Si $\mu = n(n+1)$ y $m \in \mathbb{N}$, obtenemos las soluciones

$$\underbrace{P_n^m(t)}_{\text{funciones de Legendre asociadas.}} = (1-t^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dt^m}(P_n(t)) \qquad 0 \le m \le n$$

funciones de Legendre asociadas.

Obs estas son todas las soluciones acotadas; si $m>0$ y $\mu \neq n(n+1)$ hay soluciones no acotadas.

Finalmente, se resuelve la ec. en r para $\mu = n(n+1)$ y se obtienen las soluciones r^n y r^{-n}.

Nos quedamos con r^m pues r^{-m} es no acotada en $r=0$.

Obtenemos la familia de soluciones de (LE)

$$\begin{cases} r^k \cos(m\phi)\, P_k^m(\cos\theta) \\ r^k \sin(m\phi)\, P_k^m(\cos\theta) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} k \in \mathbb{N}_0 \\ 0 \le m \le k. \end{array}$$

<u>Notación</u>

$$Y_k^m(\theta,\phi) = \begin{cases} \sqrt{2}\, N_k^m \cos(m\phi)\, P_k^m(\cos\theta) & \text{si } m>0 \\ N_k^0\, P_k(\cos\theta) & \text{si } m=0 \\ \sqrt{2}\, N_k^m \sin(-m\phi)\, P_k^{-m}(\cos\theta) & \text{si } m<0 \end{cases}$$

donde N_k^m son factores de normalización.

$$N_k^m = \sqrt{\frac{(2k+1)(k-|m|)!}{4\pi(k+|m|)!}}$$

$\{Y_k^m : k \in \mathbb{N}_0, -k \le m \le k\}$ es un s.o.n cerrado de $L^2(S^2)$ con $\langle f,g\rangle = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta,\phi)\, g(\theta,\phi) \sin\theta \, d\theta\, d\phi$

<u>Nombre</u> los Y_k^m son los "armónicos esféricos".

La expresión (formal) para la solución de (LE) es

$$u(r,\theta,\phi) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k} c_k^m\, Y_k^m(\theta,\phi)\, r^k$$

y los ctes c_k^m se eligen de forma de ajustar el dato de borde:

$$\tilde{g}(\theta,\phi) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k} c_k^m\, Y_k^m(\theta,\phi)$$

Concretamente, se tiene que

$$c_l^m = \langle g , Y_l^m \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \tilde{g}(\theta,\phi)\, Y_l^m(\theta,\phi) \sin\theta \, d\theta \, d\phi .$$