$$D \begin{cases} \text{(A)} \\ \text{(B}_1\text{)} \\ \text{(B}_2\text{)} \end{cases} \Big] \rightsquigarrow \text{sep. var.} \rightsquigarrow (*) \begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases} \quad (+) \begin{pmatrix} \text{EDO con 1} \\ \text{cond. de borde} \end{pmatrix}$$ (1)

incógnita (X, λ)

(*) puede verse como un problema de "autovalores y autovectores"

para L / $L(u) = u''$, i.e. $L = d^2/dx^2$ $\rightsquigarrow$ $Lu = \lambda u$

con $u(0) = u(\pi) = 0$, y $u \not\equiv 0$. $\quad (u'' = \lambda u)$

Las soluc. que obtuvimos fueron pares (X_n, λ_n) con $X_n = \sin(nx)$ → "autovectores"

y $\lambda_n = -n^2$ → "autovalores"

Problemas de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} \underline{\text{incógnita}}: \ u \in C^2[a,b] \ (u \not\equiv 0), \ \lambda \in \mathbb{R} \\ \underline{\text{datos}}: \ A, B, C \in C^1[a,b], \ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(OBS: $f \in C^k(W)$, $(k \geq 1)$ W cerrado $\overset{(DEF)}{\Leftrightarrow}$ $f \in C^k(U)$ $\forall\, U \supseteq W$ abierto)

$$\text{(EDO)} \begin{cases} Lu = \lambda u, \text{ con } L: C^2[a,b] \to C^0[a,b] \ / \\ (Lu)(x) = A(x)\, u''(x) + B(x)\, u'(x) + C(x)\, u(x) \end{cases}$$

$$\text{(C.B.)} \begin{cases} \text{(R)} \ (A \neq 0) \quad \alpha u(a) + \beta u'(a) = \gamma u(b) + \delta u'(b) = 0 \\ \text{(P)} \ (A \neq 0) \quad u(a) = u(b), \ u'(a) = u'(b) \\ \text{(S)} \begin{pmatrix} A(a) = 0 \\ \text{ó } A, B, C \notin C^1 \end{pmatrix} \quad u \text{ acot.}, \ p(x)\, u'(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0, \quad u(b) = 0 \end{cases}$$

siendo $p(x) = \dfrac{1}{|A(x)|} e^{\int^x B(x)/A(x)\, dx}$.

Puede verse que, típicamente (ver CODDINGTON-LEVINSON, "THEORY OF O.D.E.") :

1. Las soluc contienen un conj. (numerable) $\{(\phi_m, \lambda_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ / $\{\phi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es b.o.n. de $I[a,b]$ para el p.p.e $\langle f,g\rangle_p = \int_a^b p(x)\overline{f(x)}\, g(x)\,dx$ (es decir, $\forall g\in I[a,b]$, $S_N^{(g)} \xrightarrow[\|\cdot\|_p]{} g$, siendo $S_N^{(g)} = \sum_{n=1}^N c_n \phi_n \wedge c_n = \langle \phi_n, g\rangle_p$).
2. Si (Ψ,α) es solución $\Rightarrow \exists k /\ \alpha=\lambda_k$ y Ψ es c.l. de los ϕ_m's con $\lambda_m=\lambda_k$
3. Si $A\cdot C\leq 0$, $\{|\lambda_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y $|\lambda_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.
4. Se cumplen para los ϕ_n resultados similares que para (T).

(Ej) - $f, f'\in G[a,b] \Rightarrow S_N^{(f)}(x) \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))$

- $f\in C^0[a,b]$, $f'\in G[a,b] \wedge f$ cumple (C.B) $\Rightarrow S_N^{(f)} \rightrightarrows f$.

Bessel de orden ν $\quad (\nu\geq 0)$

$$L u = -u'' - \frac{1}{x}u' + \frac{\nu^2}{x^2}u \quad \rightsquigarrow \quad p(x) = x$$

Problema de S-L asociado $\quad u\in C^2[0,1],\ \lambda\in\mathbb{R}\ /\ (u\not\equiv 0)$

- $Lu = \lambda u \iff u'' + \frac{1}{x}u' + (\lambda - \frac{\nu^2}{x^2})u = 0$
- u acot., $p(x)u'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, $u(1)=0 \quad (S)$

$\boxed{\lambda=0}$ $\quad u'' + \frac{1}{x}u' - \frac{\nu^2}{x^2}u = 0$ (Ec de Euler)

$\nu = 0)$ $u(x) = A \ln x + B \rightsquigarrow \left| \begin{array}{l} u(1) = 0 \Rightarrow B = 0 \\ \underbrace{x\, u'(x)}_{A} \to 0 \Rightarrow A = 0 \end{array} \right.$

$\Rightarrow u \equiv 0.$

$\nu \neq 0)$ $u(x) = A x^{\nu} + B x^{-\nu} \rightsquigarrow u(1) = 0 \Rightarrow A = -B \Rightarrow$

$u(x) = A(x^{\nu} - x^{-\nu})$ $\therefore$ u acot sólo si $A = 0 \Rightarrow u \equiv 0.$

$\boxed{\lambda < 0}$ Tampoco $\exists$ soluc. (Ver Notas Jones, 48)

$\boxed{\lambda > 0}$ Definimos $t = x\sqrt{\lambda} \rightsquigarrow \tilde{u}(t) = u(t/\sqrt{\lambda}) \rightsquigarrow$

(B_{ν}) $\tilde{u}''(t) + \frac{1}{t}\tilde{u}'(t) + \left(1 - \nu^2/t^2\right)\tilde{u}(t) = 0$ (Ec. BESSEL de orden ν)

FROBENIUS $(r = \pm\nu)$

- $\tilde{u}_{\pm\nu}(t) = c_0^{\pm} \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k\, t^{2k\pm\nu}}{2^{2k}\, k!\, (\pm\nu+k)(\pm\nu+k-1)\cdots(\pm\nu+1)}$, si $\nu \notin \mathbb{N}_0$.

- $\tilde{u}_m(t) = c_0^{+} \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k\, t^{2k+m}}{2^k\, k!\, (m+k)!}$, si $\nu = m \in \mathbb{N}_0$.

(OJO: La fórmula vale en $\mathbb{C} - \mathbb{R}_{\leq 0}$.)

Función Gama $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{z-1}\, dt$, es meromorfa con polos simples en $z = 0, -1, -2, \ldots$ Lo interesante es que $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$ $\therefore$ si $z = m \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow \Gamma(m+1) = m!$ (de hecho, $\Gamma(4) = \Gamma(3+1) = 3\Gamma(3) = 3 \cdot 2\,\Gamma(2) = 3 \cdot 2 \cdot 1\,\cancel{\Gamma(1)}^{1} = 3!$). En estos términos, $(\pm\nu+k)(\pm\nu+k-1)\cdots(\pm\nu+1) = \Gamma(\pm\nu+k+1)/\Gamma(\pm\nu+1)$.

$\Rightarrow$ definiendo $c_0^{\pm} = 2^{\mp\nu}\,\Gamma(\pm\nu+1)$ $\rightsquigarrow$

- $\tilde{u}_{\pm\nu}(t) \equiv J_{\pm\nu}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k \left(\frac{t}{2}\right)^{2k\pm\nu}}{k!\,\Gamma(\pm\nu+k+1)}$, $\quad \nu \notin \mathbb{N}_0$.

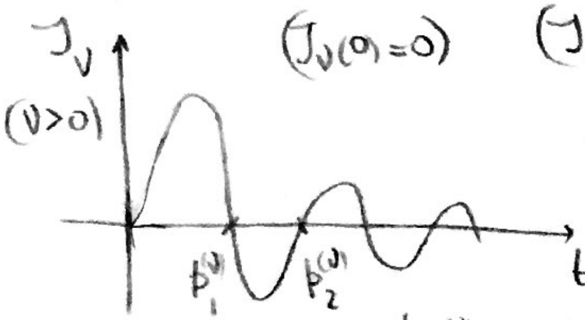
$\downarrow$

- $\tilde{u}_m(t) = J_m(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+m}}{k!\,\Gamma(m+k+1)}$, $\quad \nu = m \in \mathbb{N}_0$.

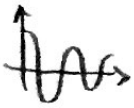
$\downarrow$

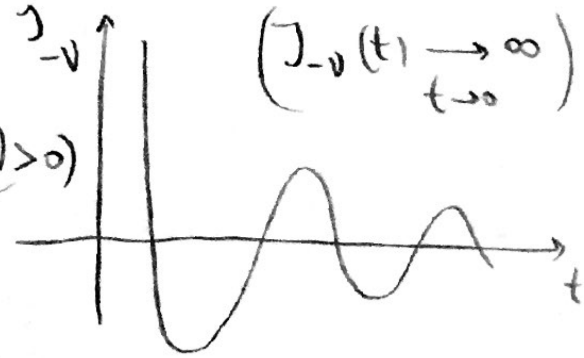
(función de Bessel de orden ν)

<u>Comportamiento</u>



$(J_0(0)=1)$





$\{p_k^{(\nu)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ = ceros de J_ν

- Si $\nu \notin \mathbb{N}_0 \Rightarrow \{J_\nu, J_{-\nu}\}$ es L.I. Se ve del comportamiento en $t=0$.
- Si $\nu = m \in \mathbb{N}_0$, consideremos $N_\alpha(t) = \dfrac{\cos(\pi\alpha)\,J_\alpha(t) - J_{-\alpha}(t)}{\sin(\pi\alpha)}$ $(\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0} - \mathbb{N}_0)$, llamada <u>función de Neuman de orden α</u>, o de <u>Bessel de segunda especie</u>. Y para $m \in \mathbb{N}_0$ definamos $N_m(t) = \lim_{\alpha\to m} N_\alpha(t)$. Puede verse que N_m existe y que es solución de (B_m). Además $\{J_\nu, N_\nu\}$ es L.I. $\forall \nu$.

Se toma entonces como solución general de (B_ν) $\forall \nu \geq 0$ a $\tilde{u}(t) = A\, J_\nu(t) + B\, N_\nu(t)$. Volvemos al problema de S-L. La soluc. general sería $u(x) = A\, J_\nu(\sqrt{\lambda}\, x) + B\, N_\nu(\sqrt{\lambda}\, x)$.

Notemos que $N_\nu(t) \xrightarrow[t\to 0]{} -\infty$, $\forall \nu \geq 0$. Luego, si queremos que u sea acotada $\Rightarrow B = 0$. Por otro lado, $x\, u'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ se cumple pues $t\, J_\nu'(t) = \nu\, J_\nu(t) - t\, J_{\nu+1}(t)$ (E6. P2).

Por último $u(1) = 0$ implica que $J_\nu(\sqrt{\lambda}) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \rho_k^{(\nu)}$ $\therefore$ $\lambda = (\rho_k^{(\nu)})^2$. En resumen, las soluc de S-L son $\{(\phi_n, \lambda_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $\phi_n(x) = J_\nu(\rho_n^{\nu} x)$ y $\lambda_n = (\rho_n^{(\nu)})^2$. En particular, el conj. $\{J_\nu(\rho_\nu^{(n)} x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un S.O. cerrado de $G[0,1]$ con p.p.e $\langle f, g\rangle_x = \int_0^1 \overline{f(x)}\, g(x)\, x\, dx$. Esto dice que podemos considerar $\forall f \in G[0,1]$ las sumas $\underbrace{\sum_k c_k^{(f)} J_\nu(\rho_k^{(\nu)} x)}$ con $c_k^{(f)} = \dfrac{\langle J_\nu(\rho_k^{(\nu)} x), f\rangle_x}{\| J_\nu(\rho_k^{(\nu)} x)\|_x^2}$

(Desarrollos de Fourier–Bessel)

<u>OBS</u>: (Ec. de Bessel modificada)

$$\left(I_\nu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t/2)^{2k+\nu}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}\right) \quad \text{Bessel modificada}$$

$$y = it \begin{cases} u''(t) + \frac{1}{t}\, u'(t) - \left(1 + \frac{\nu^2}{t^2}\right) u(t) = 0 \\ \hookrightarrow \hat{u}''(y) + \frac{1}{y}\, \hat{u}'(y) + \left(1 - \frac{\nu^2}{y^2}\right) \hat{u}(y) = 0 \end{cases} \Rightarrow u(t) = A\, J_\nu(it) + B\, \cancel{N_\nu(it)}$$

$\times\, i^{\nu}$

(Soluc gral)

no acotada

$\hat{u}(y) = u(-iy) \longleftrightarrow u(t) = \hat{u}(it)$