Sistemas ortogonales (S.O.) y ortonormales (S.O.N.)

$(V, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ $\mathbb{K}$-e.v. con p.p.e.

Def: Un S.O. es un conj. $\{\phi_n\}_{n\in I} \subseteq V$ / $\langle \phi_n, \phi_m \rangle = 0$, $\forall n, m$.

Tal conj. es S.O.N. si además $\|\phi_n\| = 1$, $\forall n \in I$.

OBS: - Supondremos que $\|\phi_n\| \neq 0$, $\forall n$.

- Típicamente, I es algún conj. numerable: $\{1,2,\dots,N\}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ... (otros productos cartesianos)

Ej (T) En $\mathcal{I}$, G, $C^0[a,b]$ tomemos el p.p.e. usual. La familia

$\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ / $\phi_0(x) = 1$, $\phi_n(x) = \begin{cases} \cos(n\pi x/\ell), & n<0 \\ \operatorname{sen}(n\pi x/\ell), & n>0 \end{cases}$, $\ell = \frac{b-a}{2}$

es un S.O. (TRIGONOMÉTRICO). Las p. normas valen: $\|1\| = \sqrt{2\ell}$,

$\|\cos(n\pi x/\ell)\| = \|\operatorname{sen}(n\pi x/\ell)\| = \sqrt{\ell}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(E) Lo mismo es cierto p/ $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ / $\phi_n(x) = e^{in\pi x/\ell}$.

Las p. normas valen: $\|e^{in\pi x/\ell}\| = \sqrt{2\ell}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. (EXPONENCIAL)

(L) Idem $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, los Polinomios de LEGENDRE, para $a=-1$ y $b=+1$.

(*) (En dimensión finita serían "coordenadas" de u.)

Definición: - Dado un S.O. $\{\phi_n\}_{n\in I} \subseteq V$ y $u \in V$, se llama coef. de Fourier de u a los números $c_n^{(u)} = \langle \phi_n, u \rangle / \|\phi_n\|^2$. (*)

- Dado además un conjunto ordenado J y una función $\psi: I \to J$ / $\{n \in I / \psi(n) \leq N\}$ es finito, $\forall N \in J$, se define la suma

de Fourier de u como $S_N^{(u)} = \sum_{\psi(n)\leq N} c_n^{(u)} \phi_n$, $N\in J$. ②
(de orden N)

Ej ① $I = \mathbb{N}$, $J = \mathbb{N}$ (con orden usual) $\wedge$ $\psi = id_{\mathbb{N}}$ $\rightsquigarrow$

$$S_N^{(u)} = \sum_{n\leq N} c_n^{(u)} \phi_n = \sum_{n=1}^{N} c_n^{(u)} \phi_n .$$

② $I = \mathbb{Z}$, $J = \mathbb{N}_0$ $\wedge$ $\psi(n) = |n|$ $\rightsquigarrow$ $S_N^{(u)} = \sum_{n=-N}^{N} c_n^{(u)} \phi_n$.

③ $I = \mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0$, $J = \mathbb{N}_0$, $\psi(i,j) = i+j$ $\rightsquigarrow$ $S_N^{(u)} = \sum_{i+j\leq N} c_{ij}^{(u)} \phi_{ij} =$
$= \sum_{m=0}^{N} \sum_{k=0}^{m} c_{k,m-k}^{(f)} \phi_{k,m-k}$.

④ $I = J = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $\psi = id_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, $(i,j)\leq(k,l)$ si $i\leq k \wedge j\leq l$,

$$\rightsquigarrow S_{N,M}^{(u)} = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} c_{nm}^{(u)} \phi_{nm} .$$

Ⓣ $f\in \mathcal{I}[a,b]$ ¿ $c_n^{(f)}$? ¿ $S_N^{(f)}$?

- $c_0^{(f)} = \langle\phi_0, f\rangle / \|\phi_0\|^2 = \langle 1, f\rangle / 2l = \frac{1}{2l}\int_a^b f(x)\,dx \equiv a_0$

- $c_{-n}^{(f)} = \langle \cos(n\pi x/l), f\rangle / l = \frac{1}{l}\int_a^b \cos n\pi x/l \, f(x)\,dx \equiv a_n$

- $c_n^{(f)} = \frac{1}{l}\int_a^b \operatorname{sen}(n\pi x/l)\, f(x)\,dx \equiv b_n$ $(n\in\mathbb{N})$

(suma TRIGONOMÉTRICA)

- $S_N^{(f)} \overset{②}{=} \sum_{n=-N}^{N} c_n^{(f)} \phi_n = a_0 + \sum_{n=1}^{N}\left(a_n \cos(n\pi x/l) + b_n \operatorname{sen}(n\pi x/l)\right)$

Ⓔ - $c_n^{(f)} = \frac{1}{2l}\int_a^b e^{-in\pi x/l} f(x)\,dx \equiv d_n$, $S_N^{(f)} \overset{②}{=} \sum_{n=-N}^{N} d_n e^{in\pi x/l}$
$(n\in\mathbb{Z})$

(suma EXPONENCIAL)

Dado $u \in V$ y un S.O. $\{\phi_m\}_{m\in I} \subseteq V$: ¿ $S_N^{(u)} \xrightarrow[N\to\infty]{} u$?

Y si lo hace, ¿en qué sentido?

Convergencia en p. norma

Def: i) Una suc. $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ converge en p. norma a $u \in V$

si $\|u_n - u\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, y se escribe $u_n \xrightarrow[\|\cdot\|]{} u$.

ii) $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en p. norma si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ /

$\|u_n - u_m\| < \varepsilon$, $\forall n, m \geq n_0$.

OBS: ① El límite en p norma no es único. Si $u_n \xrightarrow[\|\cdot\|]{} u, v \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$

$\|u - v\| = \|(u - u_n) - (v - u_n)\| \leq \underbrace{\|u - u_n\|}_{<\varepsilon/2} + \underbrace{\|v - u_n\|}_{<\varepsilon/2} < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$

$\Rightarrow \|u - v\| = 0 \Rightarrow u - v$ es nulo.

② Conv. $\Rightarrow$ Cauchy ($\not\Leftarrow$). Los espacios donde vale "$\Leftarrow$" se los llama completos. Si $\dim V < \infty \Rightarrow V$ es completo.

$\mathcal{I}$, R^2 no son completos, pero $\mathcal{L}^2$ sí!

③ En $\mathcal{I}$, G, $C^0[a,b]$ (idem R^2, $\mathcal{L}^2$) la conv. en p norma también se le dice conv. en media (cuadrática). Notar que

$f_n \xrightarrow[\|\cdot\|]{} f \iff \underbrace{\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2\, dx}_{\|f_n - f\|^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. (Esto en general no implica que $f_n \to f$ ó $f_n \rightrightarrows f$.)

④ Si en V hacemos la identificación: $u \sim v \iff \|u - v\| = 0$ eso define un nuevo e.v. $\tilde{V}$ donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un p.e. genuino!

⑤ ($\mathbb{K}$-e.v con p.e.) + (Completo) $\equiv$ Espacio de Hilbert. Ej $\widetilde{\mathcal{L}^2}[a,b]$

Lo que quisiéramos de un S.O. es lo siguiente.

Def: Un S.O.(N) $\{\phi_n\}_n \subseteq V$ es cerrado ó b.o(N) si $\forall u \in V$ se tiene que $S_N^{(u)} \xrightarrow[\|\cdot\|]{} u$, i.e. $\|S_N^{(u)} - u\| \xrightarrow[N\to\infty]{\text{(i)}} 0$.

Teorema 1: Los S.O. (T), (E) son cerrados en $\mathcal{I}[a,b]$ ($\therefore$ en $G, C^0[a,b]$) $\forall a,b \,/\, b-a=2\ell$. (Idem $\mathcal{R}^2[a,b]$, $\mathcal{L}^2[a,b]$).

(Ver RUDIN, P. OF MATH. ANALYSIS, 328) ¿Qué significa?

- $f \in \mathcal{I}[a,b] \underset{(T)}{\leadsto} \underset{(\text{coef. F})}{a_0, a_n, b_n} \leadsto \underset{(\text{suma de F.})}{S_N^{(f)} = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)}$

$\underset{\text{b.o.}}{\leadsto} \|S_N^{(f)} - f\| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$, i.e. $\int_a^b |S_N^{(f)}(x) - f(x)|^2\, dx \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$

- De nuevo, esto no significa que $S_N^{(f)} \to f$ ó $S_N^{(f)} \rightrightarrows f$.
- Además, si n es nula $\Rightarrow S_N^{(f)} \xrightarrow[\|\cdot\|]{} f+n$ también.

OBS: Puede verse que si $f \in C^1[a,b] \Rightarrow S_N^{(f)} \to f$ en (a,b).

- Volvamos a los S.O. generales.

Proposición 2 (Bessel): Sea $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ S.O. y $u \in V$. Luego,

$\boxed{\sum_{n=1}^{N} |c_n^{(u)}|^2 \|\phi_n\|^2 \leq \|u\|^2}$, $\forall N \in \mathbb{N}$. En consecuencia,

$\exists \sum_{n=1}^{\infty} |c_n^{(u)}|^2 \|\phi_n\|^2$ y $c_n^{(u)} \|\phi_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. ($\boxed{\text{S.O.N}}$: $\exists \sum_{n=1}^{\infty} |c_n^{(u)}|^2$ ∧ $c_n^{(u)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.)

D// $\|u - \sum_{n=1}^{N} c_n \phi_n\|^2 \overset{\text{(ii)}}{=} \langle u - \sum_{n=1}^{N} c_n \phi_n, u - \sum_{n=1}^{N} c_n \phi_n \rangle =$

$= \|u\|^2 - \sum_{n=1}^{N} \overline{c_n} \langle \phi_n, u \rangle - \sum_{n=1}^{N} c_n \langle u, \phi_n \rangle + \sum_{n=1}^{N} |c_n|^2 \|\phi_n\|^2 =$

$= \underbrace{\|u\|^2 - \sum_{n\geq 1}^{N} |c_n|^2 \|\phi_n\|^2}_{\geq 0}$, pues $\langle \phi_n, u\rangle = c_n \|\phi_n\|^2$. //

ii

OBS: - Se puede extender a I y J's más generales.

- $A_N = \sum_{n\geq 1}^{N} |c_n^{(u)}|^2 \|\phi_n\|^2$ es de Cauchy (sentido usual) $\Rightarrow$ Como

$\|S_N^{(u)} - S_M^{(u)}\|^2 = \|\sum_{n\geq 1}^{N} c_n^{(u)}\phi_n - \sum_{n\geq 1}^{M} c_n^{(u)}\phi_n\|^2 \underset{N\geq M}{=} \|\sum_{n=M+1}^{N} c_n^{(u)}\phi_n\|^2 =$

$= \sum_{n=M+1}^{N} |c_n^{(u)}|^2 \|\phi_n\|^2 = A_N - A_M$, se sigue que $S_N^{(u)}$ es de Cauchy en p.norma $\therefore$ converge en p.norma si V es completo! El problema es que no tiene porqué hacerlo a "u".

Proposición 3: Dado un S.O. $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$, son equivalentes:

① $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es cerrado. ② Parseval: $\|u\|^2 = \sum_{n\geq 1}^{\infty} |c_n^{(u)}|^2 \|\phi_n\|^2$, $\forall u$.

③ Plancherel: $\langle u, v\rangle = \sum_{n\geq 1}^{\infty} \overline{c_n^{(u)}} c_n^{(v)} \|\phi_n\|^2$, $\forall u, v$.

D// $\boxed{① \Leftrightarrow ②}$ Sale de ⓘ e ⓘⓘ.

$\boxed{② \Rightarrow ③}$ De ② para $u+v$ se tiene que:

$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\langle u, v\rangle) \Rightarrow \mathrm{Re}\langle u,v\rangle = \mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty} \overline{c_n^{(u)}} c_n^{(v)}$

$\sum_{n\geq 1}^{\infty} |c_n^{(u)} + c_n^{(v)}|^2 = \sum_{n\geq 1}^{\infty}\left(|c_n^{(u)}|^2 + |c_n^{(v)}|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(\overline{c_n^{(u)}} c_n^{v}\right)\right)$

De ② para $u+iv$ sale que $\mathrm{Im}\langle u, v\rangle = \mathrm{Im}\sum_{n\geq 1}^{\infty} \overline{c_n^{(u)}} c_n^{(v)}$. ✓

$\boxed{③ \Rightarrow ②}$ ✓. //

(Ej) Parseval en $I[a,b]$: Ⓣ $\int_a^b |f(x)|^2 dx = 2\ell|a_0| + \ell\sum_{n\geq 1}^{\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2)$ ($\int_a^b |f(x)|^2 dx = \|f\|^2$)

Ⓔ $\quad$ " $\quad = 2\ell\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |d_n|^2$