Matemática II

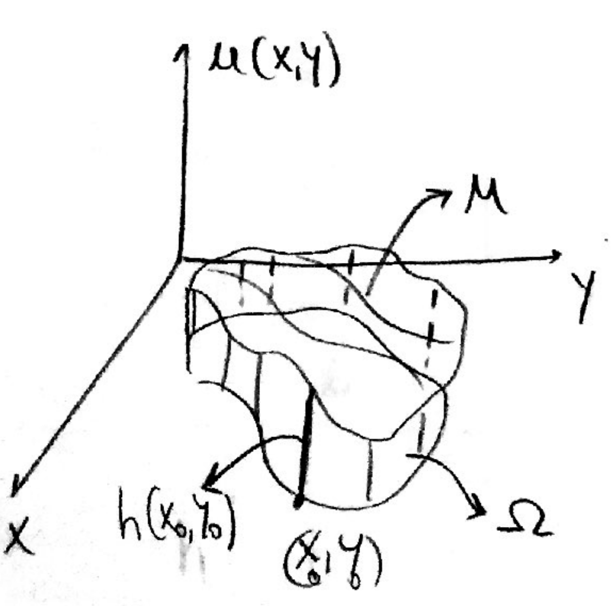
(Mi, Vi : $8^{\underline{15}} - 12^{\underline{15}}$)

Módulo A	Módulo B
↓	↓ F ↓ I
E.D.P	+ álg. lineal y probabilidad / métodos numéricos
$\equiv$ Problemas de contorno	

Ej $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto /
(incógnita)

$$\begin{cases} \Delta u = g & \text{en } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = h \end{cases} \qquad \text{con} \begin{cases} g : \Omega \to \mathbb{R} \\ h : \partial\Omega \to \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{(datos)}$$

$$\left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$



Evaluación / fechas

- 1º parcial(ito) ~ 06-03
- 2º " ~ 03-04

Reglas de aprobación?

- Clases optativas
  - → Distribuciones (Vi 20-03)
  - → T. de Laplace (Vi 27-03)

Bibliografía: Notas de Javier, WEINBERGER, BALANZAT, CHURCHILL, EVANS, ...

CRONOG.

¿Cómo lo haremos?

$\boxed{\text{E.D.P.}} \longleftrightarrow \boxed{\text{Métodos de resolución}}$

4 --- Series de funciones: $u = \sum_{n \geq 0}^{\infty} c_n \phi_n$

3 --- $\boxed{\text{¿Convergencia?}}$

2 -- Teoría de Series de Fourier

1 ---- e.v. con $\langle , \rangle$

$\{\phi_n\}$ son b.o.n.

orden cronológico

Algunos recordatorios s/ integral de Riemann

(Noriega, 253)

- Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ y sea $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$.

⊙ Dada f definida en $[a,b]$ salvo finitos ptos., acotada en $[a,b]$

$s_\pi \rightsquigarrow \sup\{s_\pi\} = s$

(π = partición de $[a,b]$)

$S_\pi \rightsquigarrow \inf\{S_\pi\} = S$

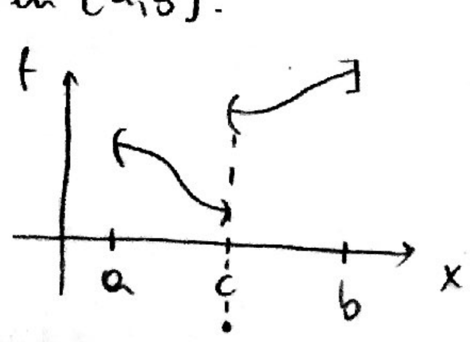
(uno para Re f y otro para Im f)

Definición: f ⊙ es integrable (Riemann) en $[a,b]$ si $s = S$. A tal número se lo llama integral de f en $[a,b]$ y se lo denota $\int_a^b f(x)\,dx$. Llamaremos $I[a,b]$ al conj de funciones integrables en $[a,b]$.

Ej
- $f \in C^0[a,b] \Rightarrow f \in I[a,b]$. (acotadas)
- f continua a trozos = seccional/cont. = general/cont. (*) en $[a,b]$, i.e. $f \in G[a,b] \Rightarrow f \in I[a,b]$.

(*) = $\exists\, n \in \mathbb{N}$ y $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ / $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $f \in C^0(x_i, x_{i+1})$ y $\exists$ y son finitos los límites laterales de f $\forall x \in [a,b]$, i.e. $\exists\, f(x \pm 0) \equiv f(x^\pm) \equiv \lim_{\varepsilon \to 0^+} f(x \pm \varepsilon)$, $\forall x \in [a,b]$.

OBS:
- f puede no estar definida en los x_i's.
- Si $f \in G[a,b] \Rightarrow f$ es acotada en $[a,b]$.
- Una tal f se vería así:



Prop A: ① $f \in \mathcal{I}[a,b] \Rightarrow f \in \mathcal{I}[c,d]$, $\forall [c,d] \subseteq [a,b]$.

② $\mathcal{I}[a,b]$ es $\mathbb{C}$-e.v. y $\int_a^b : \mathcal{I}[a,b] \to \mathbb{C}$ es l.l. ③ $C^0[a,b] \subseteq G[a,b] \subseteq \mathcal{I}[a,b]$.

④ $f \in \mathcal{I}[a,b] \Rightarrow$ (i) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$, $\forall c \in [a,b]$,

(ii) $\bar{f} \in \mathcal{I}[a,b]$, (iii) $|f| \in \mathcal{I}[a,b]$, (iv) $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$,

(v) $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \in C^0[a,b]$. ⑤ $f, g \in \mathcal{I}[a,b] \Rightarrow f \cdot g \in \mathcal{I}[a,b]$.

¿Qué pasa si f no es acotada?

Definición: f es integrable (impropia) en $[a,b]$ si $\exists n \in \mathbb{N}$ y $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ / $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, f cumple ⊙ en $[c_i, c_{i+1}]$ y $f \in \mathcal{I}[c_i, c_{i+1}]$, $\forall [c_i, c_{i+1}] \subseteq (x_i, x_{i+1})$, y además $\exists \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \equiv$

$$\equiv \lim_{\substack{c_i \to x_i^+ \\ c_{i+1} \to x_{i+1}^-}} \int_{c_i}^{c_{i+1}} f(x)\,dx$$

(Basta el límite iterado, no el doble). En tal caso se define la integral impropia de f en $[a,b]$ como $\int_a^b f(x)\,dx \equiv \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$.

Llamaremos $\mathcal{I}'[a,b]$ al conj. de funciones integ. impropias en $[a,b]$.

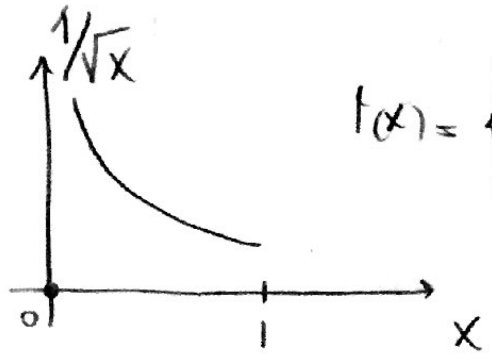
Prop B: ①', ②' $\mathcal{I} \leftrightarrow \mathcal{I}'$. ③' $\mathcal{I}[a,b] \subseteq \mathcal{I}'[a,b]$ y la integral de Riemann coincide con la impropia (vale de ① y ④.(v)).

④' $f \in \mathcal{I}'[a,b] \Rightarrow$ (i)' = (i). (ii)' $\mathcal{I} \leftrightarrow \mathcal{I}'$. Si además $|f| \leq g$, con $g \in \mathcal{I}'[a,b]$, $\Rightarrow$ (iii)' $|f| \in \mathcal{I}'[a,b]$, (iv)' $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$. (v)' = (v).

OBS: - No se cumple el análogo a ⑤. De hecho $1/\sqrt{x} \in \mathcal{I}'[0,1]$, pero $1/x = (1/\sqrt{x})^2$ no.

- Tampoco vale que si $f \in \mathcal{I}' \Rightarrow |f| \in \mathcal{I}'$. Basta considerar $f(x) = \frac{1}{x}\sin(1/x)$ en $[0,1]$.

Ej



$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1/\sqrt{x}, & 0 < x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{\varepsilon \to 0^+} \underbrace{\int_\varepsilon^1 1/\sqrt{x}\, dx}_{2\sqrt{x}\big|_\varepsilon^1} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} 2(1-\sqrt{\varepsilon}) = 2$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dx = 2 \quad \therefore \quad f \in I'[0,1].$$

- Existen otras nociones de integral (área debajo de una curva)

Ej **Integral de Lebesgue**: $\int_a^b f$. Si f cumple $\odot$ en $[a,b]$ y $f \in I[a,b] \Rightarrow \exists \int_a^b f$, y $\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,dx$. Hay funciones "muy discontinuas" para las que $\nexists$ la int. de Riemann, pero sí la de Lebesgue: $H(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \notin I[a,b]$, $\int_a^b H = 0$, $\forall [a,b] \subseteq \mathbb{R}$

↳ (Dirichlet)

Espacios con pseudo-producto escalar (p.p.e)

Definición: Sea V un $\mathbb{K}$-e.v. con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Una func. $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ es un p.p.e si:

① $\langle u, u \rangle \in \mathbb{R}$ y $\langle u, u \rangle \geq 0$, $\forall u \in V$.

② $\langle u, \alpha v + w \rangle = \alpha \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall u, v, w \in V$.

③ $\langle u, v \rangle = \begin{cases} \langle v, u \rangle, & \mathbb{K} = \mathbb{R}, \\ \overline{\langle v, u \rangle}, & \mathbb{K} = \mathbb{C}, \end{cases}$ $\forall u, v \in V$.

OBS:
- $\langle , \rangle$ es p.e. $\Leftrightarrow$ $\langle u, u \rangle = 0$ implica $u = 0$.
- $\underset{(\forall v)}{\langle 0, v \rangle = \langle v, 0 \rangle} = 0$ por ② y ③. ($\therefore \langle 0, 0 \rangle = 0$).

Ej $V = \mathbb{R}^2$, $\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle \equiv (x_1\, x_2)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix} =$

$= x_1 y_1$

Es fácil verificar 2 a 3. Por otro lado, $\langle (x_1,x_2),(x_1,x_2)\rangle = x_1^2 \geq 0$, de donde vale 1.

<u>Definición</u>: Asociado a un p.p.e $\langle , \rangle$ en V tenemos una func. $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ / $\|u\| = \langle u,u\rangle^{1/2}$, llamada <u>pseudo-norma</u>.

<u>Proposición</u>: 1_ $\|\alpha u\| = |\alpha|\,\|u\|$.

(DT) 2_ $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ $\left(\Rightarrow \big|\|u\|-\|v\|\big| \leq \|u-v\|\right)$

(C-S) 3_ $|\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\,\|v\|$ (Ver Ej 1, P1)

<u>OBS</u>: $\langle , \rangle$ es p.e. $\Leftrightarrow$ $\|u\| = 0$ implica $u = 0$.

Ej En el ejemplo anterior, p/ $u = \underbrace{(0,1)}_{\neq (0,0)}$ se tiene que $\|u\| = 0$.

<u>Definición</u>: Se dice que $u \in V$ es <u>vector nulo</u> si $\|u\| = 0$.

<u>OBS</u>: $\langle , \rangle$ es p.e. $\Leftrightarrow$ el único vector nulo es el neutro.

¿Otros ejemplos?

1_ $V = \mathcal{I}[a,b]$; $\langle f,g\rangle = \int_a^b \overline{f(x)}\, g(x)\, dx$ es e v con p.p.e (Ver PROP A)

No es p.e. pues $f(x) = \begin{cases} 1, & x = \frac{b+a}{2} \\ 0, & x \neq \frac{b+a}{2}\end{cases}$ cumple que $\|f\|^2 = \langle f,f\rangle$

$= \int_a^b |f(x)|^2 dx = \int_a^b f(x)\,dx = 0$ $\therefore$ f es vector nulo.

\- La misma fórmula define un p.p.e en $G[a,b]$ y un p.e. en $C^0[a,b]$ (ver Ej. 2, P1).

(Idem para $\langle f, g\rangle_p = \int_a^b p(x)\,\overline{f(x)}\,g(x)\,dx$, $p \in \mathcal{I}[a,b]$
y $p(x) > 0$, $\forall x \in [a,b]$.)
$\downarrow$ peso

② - En $V = \mathcal{I}'[a,b]$ tal fórmula no está bien definida, pero sí lo está en $\underline{R^2[a,b]} = \{ f \in \mathcal{I}'[a,b] \,/\, |f|^2 \in \mathcal{I}'[a,b] \}$.

- Si ahora consideramos la integral de Lebesgue, la fórmula $\langle f, g\rangle = \int_a^b \bar{f} g$ define un p.p.e en $\underline{\mathcal{L}^2[a,b]} = \{ f \,/\, \exists \int_a^b |f|^2 \}$ (funciones de cuadrado integrable).

OBS: Puede verse que una función f es vector nulo $\Leftrightarrow$
$\int_c^d f(x)\,dx = 0$, $\forall [c,d] \subseteq [a,b]$ $\equiv$ función casi-nula.

$$\Updownarrow$$

$$\left(\int_a^b |f(x)|^2\,dx = 0 \right)$$